

# 1. Úvod do studia stochastických procesů

**1.1. Motivace:** V této kapitole

zavedeme pojem **stochastického procesu**,

naučíme se rozlišovat stochastický proces

s **diskrétním časem** a **spojitým časem**

a stochastický proces

s **diskrétními stavy** a **spojitými stavy**,

budeme definovat **pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu**,

poznáme vlastnosti pravděpodobnostního rozložení stochastického procesu,

naučíme se klasifikovat stochastické procesy podle různých kritérií.

## 1.2. Definice: Definice stochastického procesu (SP)

Nechť  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor,  $\mathbb{R}$  množina reálných čísel,  $T \neq \emptyset$  neprázdná množina (nejčastěji jí přisuzujeme význam času). Nechť zobrazení  $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$  má tyto dvě vlastnosti:

- a)  $\forall t \in T$  je  $X(\cdot, t)$  náhodná veličina vzhledem k jevovému poli  $\mathcal{A}$ . Značí se  $X_t$ .
- b)  $\forall \omega \in \Omega$  je  $X(\omega, \cdot)$  prvkem množiny všech reálných funkcí definovaných na  $T$ .

Zobrazení  $X$  s těmito dvěma vlastnostmi se nazývá **stochastický proces definovaný na  $T$** . Značí se  $\{X_t; t \in T\}$ .

## 1.3. Definice: Definice složky SP, realizace SP a realizace složky SP příslušné možnému výsledku

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces.

- a) Pro libovolné, ale pevně dané  $t \in T$  se náhodná veličina  $X(\cdot, t) = X_t$  nazývá **t-tá složka stochastického procesu**.
- b) Pro libovolné, ale pevně dané  $\omega \in \Omega$  se reálná funkce  $X(\omega, \cdot)$  **nazývá realizace stochastického procesu příslušná k možnému výsledku  $\omega$** .
- c) Pro libovolná, ale pevně daná  $t \in T$  a  $\omega \in \Omega$  se číslo  $X(\omega, t)$  nazývá **realizace t-té složky stochastického procesu příslušná k možnému výsledku  $\omega$** .

#### 1.4. Příklad: Vývoj hmotnosti novorozených dětí

Nechť  $\Omega$  je množina novorozenců,  $\omega$  novorozenec,  $T = \langle 0, \infty \rangle$  časový interval počítaný od narození novorozence,  $t$  je časový okamžik. Zavedeme stochastický proces  $\{X_t; t \in T\}$ , který popisuje průběh hmotnosti kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence.

- a)  $X_t = X(.,t)$  je náhodná veličina udávající hmotnost kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence v okamžiku  $t$  (fixovaný okamžik, libovolný novorozenec).
- b)  $X(\omega,.)$  je reálná funkce popisující průběh hmotnosti daného novorozence  $\omega$  (libovolný okamžik, fixovaný novorozenec).
- c)  $X(\omega,t)$  je číselná realizace náhodné veličiny  $X_t$  příslušná k možnému výsledku  $\omega$ , tj. konkrétní hmotnost daného novorozence v daný časový okamžik (fixovaný okamžik, fixovaný novorozenec).

### 1.5. Definice: Definice časové řady a náhodné funkce

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces.

- a) Je-li množina  $T$  spočetná a lineárně uspořádaná, tj.  $t_0 < t_1 < \dots$ , jde o **stochastický proces s diskrétním časem** (tj. o **časovou řadu**).
- b) Je-li množina  $T$  interval, jde o **stochastický proces se spojitým časem** (tj. o **náhodnou funkci**).

### 1.6. Definice: Definice SP s diskrétními stavy a spojitými stavy

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces.

- a) Jestliže pro  $\forall t \in T$  je náhodná veličina  $X_t$  diskrétní, jde o **stochastický proces s diskrétními stavy**.
- b) Jestliže pro  $\forall t \in T$  je náhodná veličina  $X_t$  spojitá, jde o **stochastický proces se spojitými stavy**.

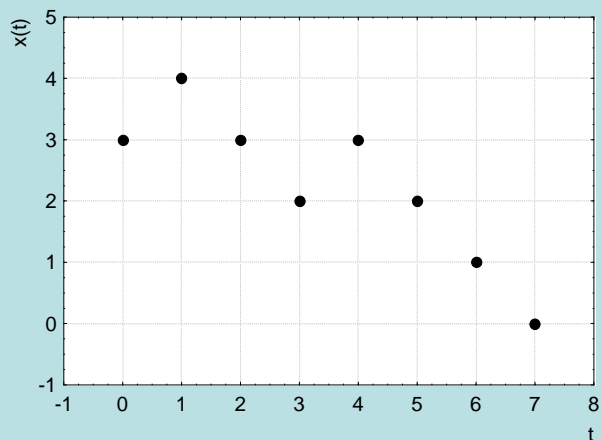
Množina všech hodnot, jichž může náhodná veličina  $X_t$  nabývat, se nazývá **množina stavů** a značí se  $J$ .

### 1.7. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskretním časem a diskretními stavy:

Dva hráči, označme je A a B, dali do hry dohromady vklad 5 Kč, z toho hráč A 3 Kč a hráč B 2 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhraje 1 Kč, když rub, prohraje 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů ruinován. Zavedeme stochastický proces  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $t = 1, 2, \dots$  je pořadové číslo hodů mincí a  $X_t = j$ , když hráč A má po t-tém hodu  $j$  Kč, tedy  $J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Např. pro posloupnost hodů  $\{L, R, R, L, R, R, R\}$  je odpovídající realizace stochastického procesu  $x(t) = \{4, 3, 2, 3, 2, 1, 0\}$ .

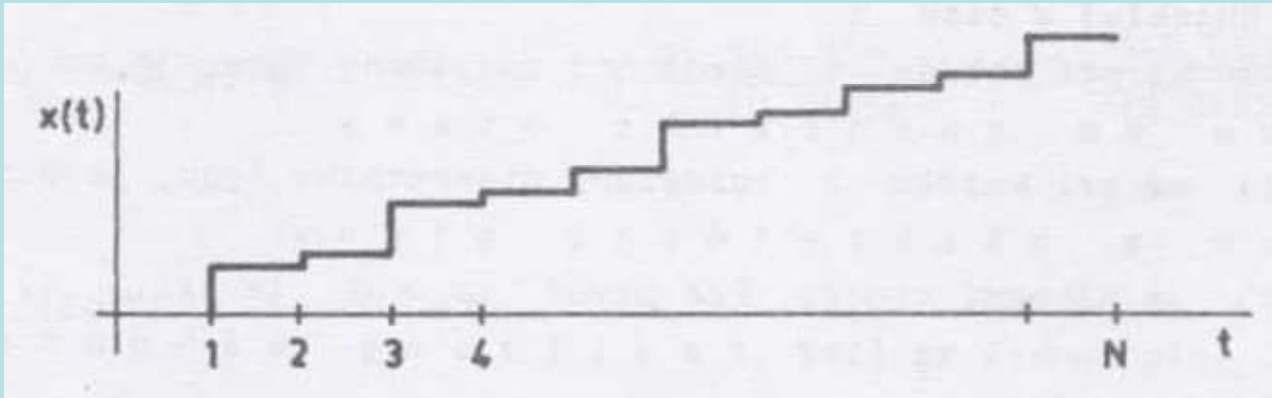
Grafické znázornění:



### 1.8. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskrétním časem a spojitými stavy:

Po určité výrobní operaci měříme velikost opotřebení obráběcího nože. Nůž se po  $N$  výrobních operacích vymění. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají opotřebení nože. Máme tedy stochastický proces  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $T = \{1, 2, \dots, N\}$  ( $t$  je pořadové číslo výrobní operace),  $X_t \in J$ , kde  $J = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq a\}$ , přičemž  $a$  je maximální opotřebení obráběcího nože.

Grafické znázornění:

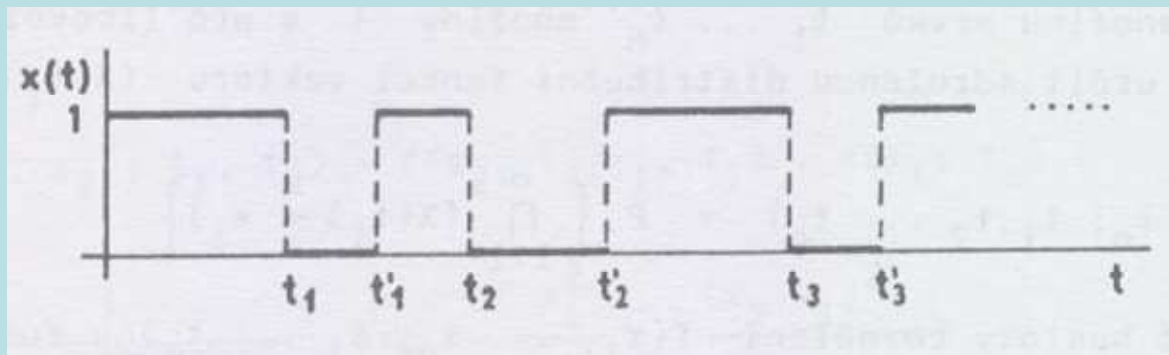


**1.9. Příklad:** Příklad stochastického procesu se spojitém časem a diskrétními stavy:

Sledujeme určité zařízení, které může být v každém okamžiku buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 0).

Zavedeme stochastický proces  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $T = \{t; t \geq 0\}$ ,  $X_t \in J$ ,  $J = \{0, 1\}$ .

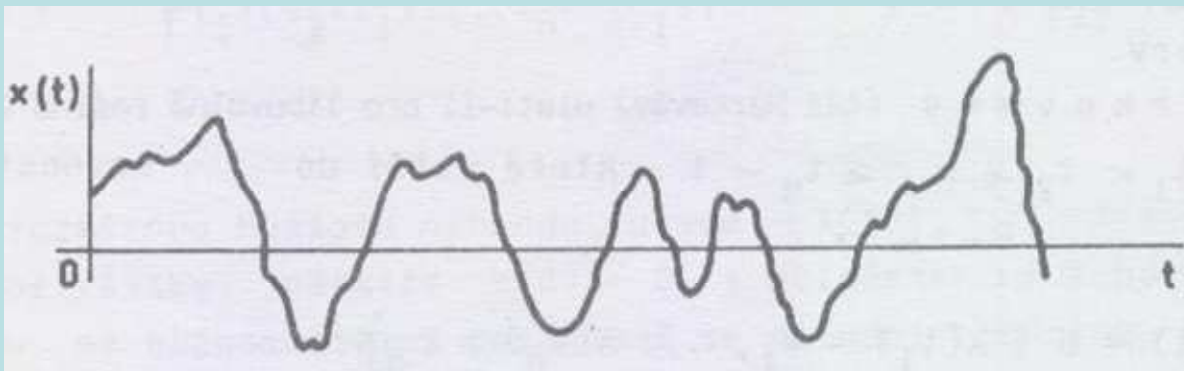
Grafické znázornění: Označme  $t_1, t_2, \dots$  okamžiky poruch,  $t'_1, t'_2, \dots$  okamžiky oprav.



**1.10. Příklad:** Příklad stochastického procesu se spojitým časem a spojitými stavy:

Sledujeme šumové napětí na výstupu nějakého elektrického přístroje. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají tomuto šumovému napětí. Zavedeme stochastický proces  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $T = \{t; t \geq 0\}$ ,  $X_t \in J$ , kde  $J = \{x; -\infty < x < \infty\}$ .

Grafické znázornění:





### 1.11. Definice: Definice pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces. Pro  $\forall t \in T$  lze pravděpodobnostní rozložení náhodné veličiny  $X_t$  popsat distribuční funkcí:  $\forall x \in \mathbb{R} : \Phi_t(x) = P(X_t \leq x)$ .

(Tato distribuční funkce je obecně funkcí dvou proměnných  $t$  a  $x$  a popisuje jednorozměrné rozložení stochastického procesu. Nepodává však úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahuje informace o závislostech náhodných veličin  $X_t$  při různých hodnotách  $t$ . Úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu podává teprve systém distribučních funkcí.)

Nechť  $(t_1, \dots, t_n) \in T$  je uspořádaná  $n$ -tice indexů,  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  je marginální vektor daného stochastického procesu. Pro  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  označme  $\Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \leq x_n)$  marginální distribuční funkci náhodného vektoru  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ .

Systém  $F_T = \{\Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n); n = 1, 2, \dots, t_1, \dots, t_n \in T\}$  se nazývá **pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu**  $\{X_t; t \in T\}$ .

### 1.12. Věta: Věta o vlastnostech pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť  $F_T$  je pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu  $\{X_t; t \in T\}$ . Pak systém  $F_T$  má tyto vlastnosti:

a)  $F_T$  je symetrický systém distribučních funkcí, tj.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in T \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), \text{ kde } \{i_1, \dots, i_n\}$$

je libovolná permutace množiny indexů  $\{1, \dots, n\}$ .

b)  $F_T$  je konzistentní systém distribučních funkcí, tj. je-li  $\{i, \dots, j\} \cup \{k, \dots, l\} = \{1, \dots, n\}$  disjunktní rozklad množiny

indexů  $\{1, \dots, n\}$ , pak 
$$\Phi_{t_i \dots t_j}(x_i, \dots, x_j) = \lim_{\substack{x_k \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_1 \rightarrow \infty}} \Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

**Důkaz:** plyne z vlastností distribuční funkce.

### 1.13. Věta: Kolmogorovova věta

Každý systém distribučních funkcí, který je symetrický a konzistentní, je pravděpodobnostním rozložením nějakého stochastického procesu.

### 1.14. Definice: Definice stochasticky ekvivalentních SP

Řekneme, že dva stochastické procesy jsou stochasticky ekvivalentní, mají-li stejné pravděpodobnostní rozložení.

### 1.15. Příklad: Odvození pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť  $X$  je náhodná veličina s distribuční funkcí  $\Psi(x)$  a  $f(t)$  je reálná funkce taková, že

a)  $f(t) > 0$  pro  $\forall t \in T$

b)  $f(t) < 0$  pro  $\forall t \in T$ .

Pro  $\forall t \in T$  položme  $X_t = f(t)X$ . Odvoďte pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu  $\{X_t; t \in T\}$ .

**Řešení:**

ad a)

$$\begin{aligned}\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \leq x_n) = P(f(t_1)X \leq x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \leq x_n) = \\ &= P\left(X \leq \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \leq \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = \Psi\left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).\end{aligned}$$

ad b)

$$\begin{aligned}\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \leq x_n) = P(f(t_1)X \leq x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \leq x_n) = \\ &= P\left(X \geq \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \geq \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \geq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 1 - P\left(X \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = \\ &= 1 - \Psi\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).\end{aligned}$$

Je-li  $X$  spojitá náhodná veličina, pak  $P\left(X = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 0$ .

### 1.16. Poznámka: Dělení SP podle různých kritérií

a) Rozdělení stochastických procesů podle závislosti jejich pravděpodobnostního rozložení na čase

– **striktně stacionární procesy** (je pro ně charakteristická určitá stálost v čase):  $\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n)$ , kde  $h > 0$

– **evoluční procesy** (mají výrazný časový trend)

b) Rozdělení stochastických procesů podle toho, zda k určení jejich pravděpodobnostního rozložení stačí znát pouze dvourozměrné distribuční funkce či nikoliv:

– **definitní procesy**

– **hereditní procesy**

c) Rozdělení definitních procesů podle toho, zda jejich pravděpodobnostní rozložení závisí pouze na rozdílu časových okamžiků, nikoliv na jejich umístění na časové ose

– **homogenní procesy**

– **nehomogenní procesy.**

## 2. Funkcionální charakteristiky stochastických procesů

### 2.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme **trend**, **rozptyl** a **směrodatnou odchylku** stochastického procesu,  
**autokovarianční** a **autokorelační funkci** stochastického procesu,  
poznáme vlastnosti těchto funkcionálních charakteristik,  
budeme definovat **centrovaný** a **standardizovaný stochastický proces**  
**slabě stacionární stochastický proces**.

## 2.2. Definice: Definice střední hodnoty a rozptylu SP, definice centrovaného a standardizovaného SP

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces.

a) Jestliže pro  $\forall t \in T$  existuje střední hodnota  $E(X_t)$ , pak zavedeme reálnou funkci  $\mu(t)$  vztahem:

$$\forall t \in T : \mu(t) = E(X_t).$$

Tato funkce se nazývá **střední hodnota (trend) SP**. ( $\mu(t)$  charakterizuje polohu realizací SP na časové ose.)

b) Jestliže pro  $\forall t \in T$  existuje rozptyl  $D(X_t)$ , pak zavedeme reálnou funkci  $\sigma^2(t)$  vztahem:

$$\forall t \in T : \sigma^2(t) = D(X_t).$$

Tato funkce se nazývá **rozptyl SP**. Funkce  $\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)}$  se nazývá **směrodatná odchylka SP**.

( $\sigma^2(t)$  charakterizuje variabilitu realizací stochastického procesu kolem trendu.)

c) Nechť stochastický proces má střední hodnotu  $\mu(t)$  a rozptyl  $\sigma^2(t)$ , který je konečný a nenulový.

Transformovaný stochastický proces  $\{Y_t; t \in T\}$ , kde  $Y_t = X_t - \mu(t)$ , se nazývá **centrovaný SP**.

Transformovaný stochastický proces  $\{Z_t; t \in T\}$ , kde  $Z_t = \frac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$ , se nazývá **standardizovaný SP**.

(Lze snadno ukázat, že centrovaný SP má nulovou střední hodnotu a rozptyl stejný jako původní SP. Standardizovaný SP má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.)

### 2.3. Příklad:

Nechť náhodná veličina  $X$  má střední hodnotu  $E(X) = 2$  a rozptyl  $D(X) = 9$ .

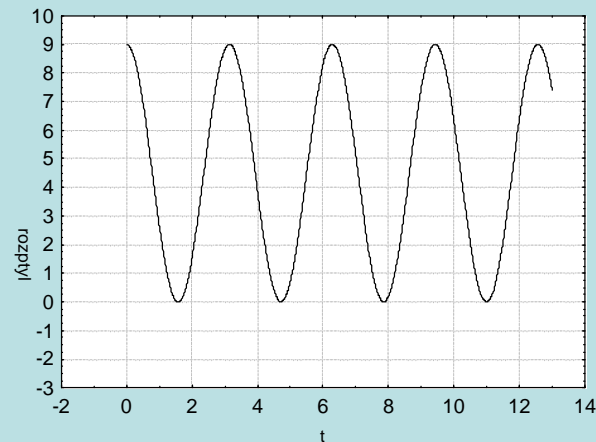
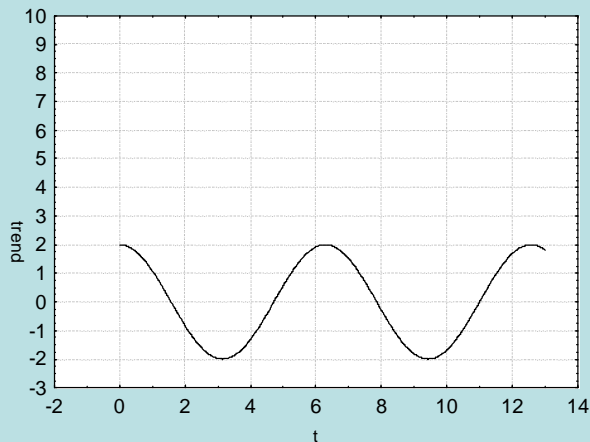
Zavedeme SP  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $X_t = X \cdot \cos \omega t$ ,  $\omega > 0$  je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP.

**Řešení:**

$$\mu(t) = E(X_t) = E(X \cdot \cos \omega t) = \cos \omega t \cdot E(X) = 2 \cos \omega t$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(X \cdot \cos \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(X) = 9 \cos^2 \omega t$$

Např. pro  $\omega = 1$  dostaneme:



## 2.4. Poznámka: Další funkcionální charakteristiky stochastického procesu

Podobně jako u náhodných veličin lze pro stochastický proces zavést další momentové charakteristiky, např. šikmost a špičatost. Všechny tyto charakteristiky, které vycházejí ze znalosti jednorozměrného rozložení stochastického procesu, však nepostačují k popisu pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahují informace o závislostech mezi složkami stochastického procesu.

## 2.5. Definice: Definice autokovarianční a autokorelační funkce SP

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces. Předpokládáme, že pro  $\forall t \in T$  existuje střední hodnota  $E(X_t)$  a  $E(X_t^2) < \infty$ .

a) Reálnou funkci  $\gamma(t_1, t_2)$  dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = E((X_{t_1} - \mu(t_1))(X_{t_2} - \mu(t_2)))$  nazveme **autokovarianční funkcí stochastického procesu**.

b) Reálnou funkci  $\rho(t_1, t_2)$  dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T: \rho(t_1, t_2) = R(X_{t_1}, X_{t_2}) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$  nazveme **autokorelační funkcí stochastického procesu**.

(Autokovarianční funkce je zobecněním varianční matice náhodného vektoru a autokorelační funkce je zobecněním korelační matice náhodného vektoru. Tyto funkce obsahují informace o lineárních závislostech mezi složkami SP.)



## 2.6. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce SP

Pro autokovarianční funkci stochastického procesu platí:

$$\text{a) } \forall t \in T : \gamma(t, t) = \sigma^2(t)$$

$$\text{b) } \forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_2, t_1)$$

$$\text{c) } \forall t_1, t_2 \in T : |\gamma(t_1, t_2)| \leq \sigma(t_1)\sigma(t_2) \text{ (zobecněná Cauchyho – Schwarzova – Buňakovského nerovnost)}$$

**Důkaz:** Plyne z vlastností kovariance.

## 2.7. Příklad:

Najděte autokovarianční a autokorelační funkci SP z příkladu 2.3. V tomto příkladu byl SP zaveden vztahem  $X_t = X \cdot \cos \omega t$ , přičemž  $E(X) = 2$ ,  $D(X) = 9$

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \gamma(t_1, t_2) &= C(X_{t_1}, X_{t_2}) = C(X \cdot \cos \omega t_1, X \cdot \cos \omega t_2) = \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \cdot C(X, X) = \\ &= \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \cdot D(X) = 9 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 \end{aligned}$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{9 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2}{\sqrt{9 \cos^2 \omega t_1} \sqrt{9 \cos^2 \omega t_2}} = 1$$

## 2.8. Věta: Věta o střední hodnotě a autokovarianční funkci transformovaného SP

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je stochastický proces se střední hodnotou  $\mu_X(t)$  a autokovarianční funkcí  $\gamma_X(t_1, t_2)$ . Nechť  $f(t)$  je reálná funkce definovaná na  $T$ .

a) Zavedeme stochastický proces  $\{Y_t; t \in T\}$ , kde  $Y_t = X_t + f(t)$ . Pak platí:

$$\forall t \in T: \mu_Y(t) = \mu_X(t) + f(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma_Y(t_1, t_2) = \gamma_X(t_1, t_2)$$

b) Zavedeme stochastický proces  $\{Y_t; t \in T\}$ , kde  $Y_t = f(t) X_t$ . Pak platí:

$$\forall t \in T: \mu_Y(t) = f(t)\mu_X(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma_Y(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2)\gamma_X(t_1, t_2)$$

**Důkaz:** Plyne z vlastností střední hodnoty a kovariance.

## 2.9. Definice: Definice slabě stacionárního SP

Stochastický proces  $\{X_t; t \in T\}$  se nazývá **slabě stacionární**, jestliže platí:

- a)  $\forall t \in T : \mu(t) = c$  (trend je konstantní)
- b)  $\forall t \in T : \sigma^2(t) < \infty$  (rozptyl je konečný)
- c)  $\forall t_1, t_2 \in T, \forall h > 0 : \gamma(t_1 + h, t_2 + h) = \gamma(t_1, t_2)$  (kovariance libovolných dvou složek SP závisí pouze na jejich vzdálenosti na časové ose a nikoliv na jejich umístění na časové ose)

## 2.10. Poznámka: Vztah mezi striktní a slabou stacionaritou SP, zavedení autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

- a) Je-li stochastický proces striktně stacionární, je i slabě stacionární.
- b) Je-li stochastický proces slabě stacionární, pak pro  $\forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = \gamma(0, t_2 - t_1)$ . Znamená to, že autokovarianční funkce závisí pouze na rozdílu argumentů  $t_2 - t_1 =: h$ . V tomto případě zavádíme funkci jedné proměnné, kterou značíme rovněž symbolem  $\gamma$ , vztahem  $\forall h \in T : \gamma(h) = \gamma(0, h)$ . Je to autokovarianční funkce slabě stacionárního SP.

### 2.11. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

Autokovarianční funkce slabě stacionárního stochastického procesu má tyto vlastnosti:

a)  $\forall t \in T : \sigma^2(t) = \gamma(0) = \sigma^2$  (všechny složky SP mají týž rozptyl)

b)  $\forall h > 0 : \gamma(h) = \gamma(-h)$  (autokovarianční funkce je sudá)

c)  $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

**Důkaz:** Důkaz vlastností a) , b) je triviální.

Ad c) Uvažme centrovaný slabě stacionární SP  $\{X_t; t \in T\}$  (tj. pro  $\forall t \in T : \mu(t) = 0$ ). Pak

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = E(X_t^2) - [E(X_t)]^2 = E(X_t^2).$$

$$\text{Dále } \gamma(h) = \gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h}).$$

Počítáme

$$E\left([X_t \pm X_{t+h}]^2\right) = E(X_t^2) \pm 2E(X_t X_{t+h}) + E(X_{t+h}^2) = \sigma^2(t) \pm 2\gamma(h) + \sigma^2(t+h) = 2[\gamma(0) \pm \gamma(h)].$$

Protože  $E\left([X_t \pm X_{t+h}]^2\right) \geq 0$ , plyne odtud, že  $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ .

## 2.12. Příklad:

Nechť  $Y, Z$  jsou standardizované náhodné veličiny (tj.  $E(Y) = 0, E(Z) = 0, D(Y) = 1, D(Z) = 1$ ), které jsou stochasticky nezávislé. Zavedeme SP  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $X_t = Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t$ ,  $\omega > 0$  je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.

### Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos \omega t \cdot E(Y) + \sin \omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(Y) + \sin^2 \omega t \cdot D(Z) = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstantní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit  $\gamma(h) = \gamma(t, t+h)$ . První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\begin{aligned} \gamma(t, t+h) &= C(X_t, X_{t+h}) = C(Y \cdot \cos t + Z \cdot \sin t, Y \cdot \cos(t+h) + Z \cdot \sin(t+h)) = \\ &= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Y, Y) + \sin t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Z, Y) + \cos t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Y, Z) + \\ &+ \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Z, Z) = \\ &= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot D(Y) + \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot D(Z) = \cos t \cdot \cos(t+h) + \sin t \cdot \sin(t+h) = \\ &= \cos(t - (t+h)) = \cos(-h) = \cos(h) = \gamma(h) \end{aligned}$$

### 2.13. Věta: Věta o vlastnostech autokorelační funkce slabě stacionárního SP

Pro autokorelační funkci slabě stacionárního SP platí:

$$\forall h \in T : \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

**Důkaz:**

$$\forall t_1, t_2 \in T : \rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}. \text{ Je-li SP slabě stacionární, pak } \gamma(t_1, t_2) = \gamma(h), \sigma^2(t_1) = \sigma^2(t_2) = \gamma(0), \text{ tedy } \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

### 2.14. Příklad:

Nechť je dán SP  $\{X_t; t \in T\}$ , kde náhodné veličiny  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots$  jsou stochasticky nezávislé a mají všechny stejnou distribuční funkci  $\Phi(x)$ . Určete střední hodnotu, rozptyl a autokorelační funkci tohoto SP.

**Řešení:** Protože náhodné veličiny  $X_t, t \in T$  mají všechny stejnou distribuční funkci  $\Phi(x)$ , mají i stejnou střední hodnotu

$$E(X_t) = \mu \text{ a stejný rozptyl } D(X_t) = \sigma^2. \text{ Dále počítáme autokovarianční funkci } \gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}. \text{ Jedná}$$

se tedy o slabě stacionární SP. Nyní spočteme autokorelační funkci  $\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$ . Znamená to, že

neexistuje žádná závislost mezi realizacemi SP ve dvou různých okamžicích.