3. Markovské řetězce s diskrétním časem

3.1. Definice: Definice markovského řetězce s diskrétním časem

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, N_0 = {0, 1, 2, ...} je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a J = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že J = {0, 1, 2, ...} nebo J = {0,1, ..., n}). Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ definovaný na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, jehož složky nabývají hodnot z množiny stavů J, se nazývá markovský řetězec (s diskrétním časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J\ \exists n \in N_0 : P(X_n = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall n \in N_0 \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$ za předpokladu, že $P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) > 0$.

(markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých)

Vysvětlení: Nejčastější interpretací markovských řetězců je nějaká soustava, která se může nacházet ve stavech a_0, a_1, … V průběhu času soustava mění svoje stavy. Tyto stavy pozorujeme v diskrétních časových okamžicích n = 0, 1, … Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j, když v okamžiku n je soustava ve stavu a_j. Markovská vlastnost znamená, že všechny dosavadní stavy soustavy mají vliv na budoucí stav pouze prostřednictvím stavu přítomného.

3.2. Věta: Věta o simultánní pravděpodobnostní funkci markovského řetězce s diskrétním časem

Je-li $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec, pak platí:

$$P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_n = j_n) = P(X_0 = j_0) P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

pokud $P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} = j_{n-1}) > 0$, = 0 jinak.

Důkaz:

Podle věty o násobení pravděpodobností a podle markovské vlastnosti dostáváme:

$$\begin{aligned} &P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_n = j_n) = \\ &= P(X_0 = j_0) \cdot P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot P(X_2 = j_2 / X_1 = j_1 \wedge X_0 = j_0) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) = \\ &= P(X_0 = j_0) \cdot P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot P(X_2 = j_2 / X_1 = j_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1}) \end{aligned}$$

Věta o násobení pravděpodobností:
Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takové jevy, že $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Pak $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$.

Markovská vlastnost:

$$P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

3.3. Příklad: Nechť Y_1, Y_2, ... jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} (jde o tzv. celočíselné náhodné veličiny). Položme $X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \geq 1$. Dokažte, že stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec.

Řešení: Dokážeme, že levá strana v markovské vlastnosti se rovná pravé straně.

Levá strana: $P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0) = \left| P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right| = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}$.

Jevy zapsané pomocí náhodných veličin X_0, X_1, ..., X_n se budeme snažit zapsat pomocí náhodných veličin Y_1, Y_2, ..., Y_n, které jsou stochasticky nezávislé.

$X_0 = 0$, $X_1 = X_0 + Y_1 \Rightarrow Y_1 = X_1 - X_0$, $X_2 = X_1 + Y_2 \Rightarrow Y_2 = X_2 - X_1$, ..., $X_n = X_{n-1} + Y_n \Rightarrow Y_n = X_n - X_{n-1}$, tedy

$\{X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_n = j_n - j_{n-1} \wedge Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge \ldots \wedge Y_1 = j_1\}$

Dále $\{X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge \ldots \wedge Y_1 = j_1\}$.

Po dosazení do levé strany:

$$\frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 = j_1)}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 = j_1)} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$$

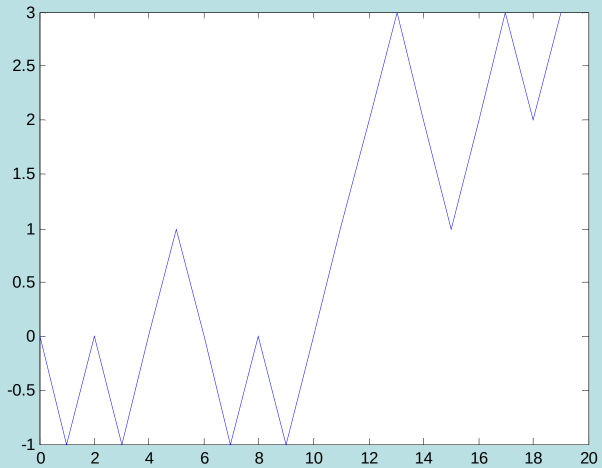
Pravá strana: $P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1}) = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_{n-1} = j_{n-1})} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$

Protože levá strana se rovná pravé straně, je daný stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec.

3.4. Příklad: Nechť Y_1, Y_2, … jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají rovnoměrné diskrétní rozložení na množině G = {-1, 1} (tj. nabývají hodnot ±1 s pravděpodobností 1/2). Položme $X_0 = 0$ a zavedeme náhodnou veličinu $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Tato náhodná veličina udává polohu částice na přímce, kterou částice zaujme po n krocích, když na počátku je v bodě 0 a pohybuje se v obou možných směrech se stejnou pravděpodobností. Markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se nazývá symetrická náhodná procházka na přímce.

Náhodnou procházku lze simulovat v MATLABu pomocí funkce np:

```
function [poloha]=np(N)
%funkce na simulaci symetricke nahodne prochazky po primce
%syntaxe: poloha=np(N)
%vstupni parametry: N ... delka nahodne prochazky
%vystupni parametr: poloha ... vektor souradnic bodu, v nichz se castice nachazi  v jednotlivych krocich
%funkce nakresli trajektorii nahodne prochazky
%funkce poskytne tabulku rozlozeni cetnosti souradnic castice na primce, v nichz se nahodna prochazka
nachazi
NC=unidrnd(2,N,1);poloha(1)=0;
for i=2:N
   if NC(i)==1 poloha(i)=poloha(i-1)-1;
   else poloha(i)=poloha(i-1)+1;
   end
end
t=[0:N-1];
plot(t,poloha)
tabulate(poloha)
```



3.5. Označení

Jev $\{X_n = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku n ve stavu j.

$P(X_n = j) = p_j(n)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku n.

$\mathbf{p}(n) = (\ldots., p_j(n), \ldots)$ – vektor absolutních pravděpodobností.

$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}(n,n+1)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku n do stavu j v okamžiku n+1 (pravděpodobnost přechodu 1. řádu).

$$\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(n, n+1) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ - matice pravděpodobností přechodu 1. řádu.

$P(X_{n+m} = j / X_n = i) = p_{ij}(n,n+m)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku n do stavu j v okamžiku n+m (pravděpodobnost přechodu m-tého řádu).

$$\mathbf{P}(n, n+m) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(n, n+m) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ - matice pravděpodobností přechodu m-tého řádu.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j.

$\mathbf{p}(0) = (\ldots., p_j(0), \ldots)$ – vektor počátečních pravděpodobností.

3.6. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce s diskrétním časem

Nechť $\{X_n ; n \in N_0\}$ je markovský řetězec. Pokud dále uvedené podmíněné pravděpodobnosti existují, platí pro

$\forall n, m, m_1, m_2 \in N_0 \forall i, j \in J :$

a) $P(X_{n+m} = j / X_n = i) \geq 0$, tj. $p_{ij}(n,n+m) \geq 0$

$$P(X_n = j / X_n = i) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}, \text{ tj. } p_{ij}(n,n) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}.$$

b) $\sum_{j \in J} P(X_{n+m} = j / X_n = i) = 1$, tj. $\sum_{j \in J} p_{ij}(n, n+m) = 1.$

(Přechod ze stavu i v okamžiku n do nějakého stavu j v okamžiku n+m je jev s pravděpodobností 1.)

c) $P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_n = i) = \sum_{k \in J} P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)$, tj.

$$p_{ij}(n, n+m_1+m_2) = \sum_{k \in J} p_{ik}(n, n+m_1) p_{kj}(n+m_1, n+m_1+m_2)$$

(Chapmanovy – Kolmogorovovy rovnice)

d) $P(X_{n+m} = j) = \sum_{k \in J} P(X_n = k) P(X_{n+m} = j / X_n = k)$, tj. $p_j(n+m) = \sum_{k \in J} p_k(n) p_{kj}(n, n+m)$

(Zákon evoluce)

Důkaz:

ad a) $P(X_n = j / X_n = i) = \frac{P(X_n = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} \geq 0$, protože $P(X_n = j \wedge X_n = i) \geq 0$ a $P(X_n = i) > 0$ podle (a) z definice 3.1.

$$P(X_n = j / X_n = i) = \frac{P(X_n = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}$$

ad b) $\sum_{j \in J} P(X_{n+m} = j / X_n = i) = P\left(\bigcup_{j \in J} \{X_{n+m} = j\} / X_n = i\right) = \frac{P(\Omega \cap \{X_n = i\})}{P(X_n = i)} = 1$

ad c)

$$P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_n = i) = \frac{P(X_{n+m_1+m_2} = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \frac{P(\{X_{n+m_1+m_2} = j\} \cap \Omega \cap \{X_n = i\})}{P(X_n = i)} =$$

$$= \frac{P\left(\{X_{n+m_1+m_2} = j\} \cap \bigcup_{k \in J} \{X_{n+m_1} = k\} \cap \{X_n = i\}\right)}{P(X_n = i)} = \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i \wedge X_{n+m_1} = k \wedge X_{n+m_1+m_2} = j)}{P(X_n = i)} =$$

$$= \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i) P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i) P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)}{P(X_n = i)}$$

$$= \sum_{k \in J} P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)$$

ad d)

$$P(X_{n+m} = j) = P(\Omega \cap \{X_{n+m} = j\}) = P\left(\bigcup_{k \in J} \{X_n = k\} \cap \{X_{n+m} = j\}\right) = \sum_{k \in J} P(X_n = k \wedge X_{n+m} = j) = \sum_{k \in J} P(X_n = k) P(X_{n+m} = j / X_n = k)$$

3.7. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce s diskrétním časem v maticovém tvaru

a) **P**(n,n+m) ≥ **0**, kde **0** je nulová matice, **P**(n,n) = **I**, kde **I** je jednotková matice.

b) **P**(n,n+m)**e** = **e**, kde **e** je sloupcový vektor ze samých jedniček.

c) **P**($n,n+m_1+m_2$) = **P**($n,n+m_1$) **P**($n+m_1,n+ m_1+m_2$).

d) **p**(n+m) = **p**(n) **P**(n,n+m).

3.8. Příklad:

Nechť je dán markovský řetězec $\left\{X_n ; n \in N_0\right\}$ s množinou stavů J = {0,1}. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány

maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n je **p**(n) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Jaká je pravděpodobnost,

že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1)?

Řešení: Podle zákona evoluce máme: **p**(n+1) = **p**(n) **P**(n,n+1) =

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}, \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{13}{24}\right) = (0{,}4583; 0{,}5417)$$

Po jednom kroku tedy bude řetězec ve stavu 0 s pravděpodobností 0,4583 a ve stavu 1 s pravděpodobností 0,5417.

3.9. Definice: Definice stochastického vektoru a stochastické matice

a) Řádkový vektor s nejvýše spočetným počtem nezáporných složek, jejichž součet je roven 1, se nazývá stochastický vektor.

b) Čtvercová matice, jejímž každým řádkem je stochastický vektor, se nazývá stochastická matice.

c) Řekneme, že markovský řetězec, stochastický vektor a stochastická matice jsou odpovídající dimenze, když počet stavů markovského řetězce, počet složek stochastického vektoru a řád stochastické matice jsou stejné.

4. Homogenní markovské řetězce s diskrétním časem

4.1. Definice: Definice homogenního markovského řetězce (s diskrétním časem)

Řekneme, že markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J je homogenní, jestliže jeho pravděpodobnosti přechodu 1. řádu $p_{ij}(n,n+1)$ nezávisí na okamžiku n, tj. pro $\forall n \in N_0 \forall j \in J : P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}$. Matice pravděpodobností přechodu 1. řádu je pak rovna **P**(1) a značí se **P**. Matice **P** se nazývá matice přechodu homogenního markovského řetězce.

Vysvětlení homogenity: Pravděpodobnostní chování HMŘ se sice může s časem měnit, ale náhodný mechanismus, který tyto změny způsobuje – matice přechodu **P** – je sám časově neproměnný.

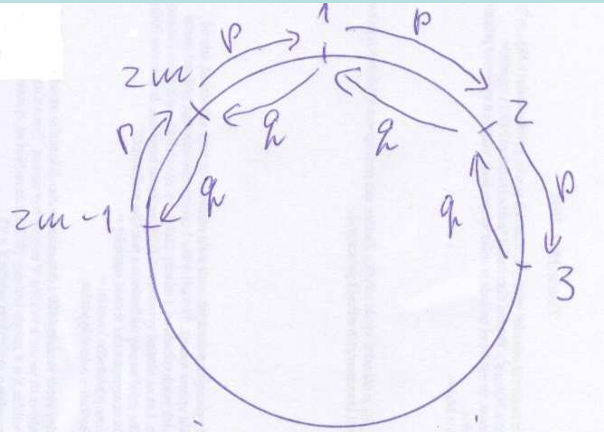
4.2. Příklad:

Na okružní trase je umístěno 2m bodů. Mezi nimi převáží auto náklady. Náklad se z každého bodu převáží do následujícího s pravděpodobností p nebo do předchozího s pravděpodobností q = 1 – p. Zavedeme stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$, kde X_n = j, když v okamžiku n je auto v bodě j, j = 0, 1, ..., 2m. Ukažte, že tento stochastický proces je homogenní markovský řetězec a najděte jeho matici přechodu.

Řešení:

Daný stochastický proces je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Je to homogenní markovský řetězec, protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n.

Grafické znázornění situace:



Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Věta:

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je stochastický proces s množinou stavů J, **p** je stochastický vektor odpovídající dimenze a **P** stochastická matice odpovídající dimenze. Pak $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = **p** a maticí přechodu **P**, právě když všechny marginální pravděpodobnostní funkce tohoto procesu jsou tvaru:

$$\forall n \in N_0 \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_n = j_n) = p_{j_0}(0) p_{j_0 j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1} j_n} .$$

Důkaz: Plyne z věty 3.2. a markovské vlastnosti.

4.4. Věta: Vlastnosti homogenního markovského řetězce v maticovém tvaru

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a maticí přechodu **P**. Pak pro $\forall n, m \in N_0, n \geq 1$ platí:

a) **P**(n,n+m) = **P**(m) = $\mathbf{P}^m$.

b) **p**(n,n+m) = **p**(m) = **p**(0)$\mathbf{P}^m$.

Důkaz:

ad a) Z Ch – K rovnice plyne: **P**(m) = **P**(m-1+1) = **P**(m-1)**P** = **P**(m-2+1)**P** = **P**(m-2)$\mathbf{P}^2$ = ... = **P**(0)$\mathbf{P}^m$ = $\mathbf{P}^m$.

ad b) Ze zákona evoluce plyne: **p**(m) = **p**(m-1+1) = **p**(m-1)**P** = **p**(m-2+1)**P** = **p**(m-2)$\mathbf{P}^2$ = ... = **p**(0)$\mathbf{P}^m$.

4.5. Poznámka: Z věty 4.4. plyne, že k určení pravděpodobnostního chování homogenního markovského řetězce stačí znát vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) a matici přechodu **P**.

4.6. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1/2, 1/6, 1/3) a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Určete vektor absolutních pravděpodobností po čtyřech krocích.

Řešení: $\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{31}{96}, \frac{31}{96}, \frac{34}{96}\right)$

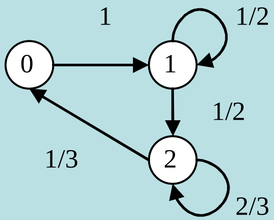
4.7. Poznámka: Přechodový diagram v rozvinutém a nerozvinutém tvaru.

Homogenní markovský řetězec lze graficky znázornit pomocí přechodového diagramu, a to buď v rozvinutém nebo nerozvinutém tvaru. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde vrcholy jsou stavy, orientované hrany se zakreslují pro kladné pravděpodobnosti přechodu za jeden krok a ohodnocení hran (váhy) jsou dána kladnými pravděpodobnostmi přechodu.

4.8. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1,2} a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$ Nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

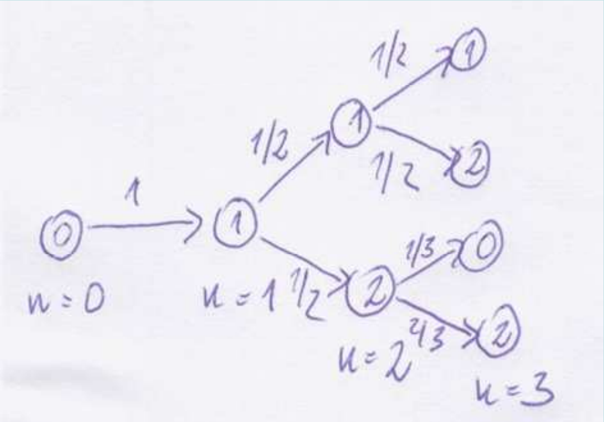


4.9. Poznámka: Pomocí přechodového diagramu v rozvinutém tvaru lze získat vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n. Postupuje se tak, že se pro každý možný stav v okamžiku n sečtou součiny vah těch hran, které v okamžiku n v daném stavu končí.

4.10. Příklad: Pro HMŘ z př. 4.8. vypočtěte pomocí přechodového diagramu v rozvinuté podobě vektor absolutních pravděpodobností pro n = 3.

Řešení:

Přechodový diagram v rozvinutém tvaru pro první tři kroky:



$$p_0(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$p_1(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_2(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12} \right)$$

4.11. Příklad: Model havarijního pojištění

Počet výskytů pojistné události v n-tém pojistném období je náhodná veličina Y_n, n = 1, 2, …. Předpokládáme, že náhodné veličiny Y_n jsou stochasticky nezávislé a všechny se řídí rozložením Po(λ). Existují tři kategorie pojistného: 0 … základní pojistné, 1 … pojistné s bonusem 30%, 2 … pojistné s bonusem 50%. V prvním pojistném období platí klient základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezeškodní průběh, je klient v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše. Pokud uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže. Při uplatnění dvou a více pojistných událostí je zařazen o dvě kategorie níže. Nechť náhodná veličina X_n značí kategorii pojistného v n-tém pojistném období. Lze snadno odvodit, že platí

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min\{X_{n+1}, 2\} \text{pro } Y_n = 0 \\ \max\{X_{n-1}, 0\} \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 \text{ pro } Y_n \geq 2 \end{cases}$$

Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2} je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n, jde o homogenní markovský řetězec.

a) Najděte vektor počátečních pravděpodobností a matici přechodu. (Návod: využijte toho, že matice přechodu je stochastická matice.

b) Nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

Ad a) Vektor počátečních pravděpodobností: **p**(0) = (1, 0, 0).

Stanovíme jednotlivé prvky matice přechodu.

$$p_{00} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$p_{01} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = P(Y_n = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$p_{02} = 1 - (p_{00} + p_{01}) = 0$$

$$p_{10} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 0$$

$$p_{12} = P(X_{n+1} = 2 / X_n = 1) = P(Y_n = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

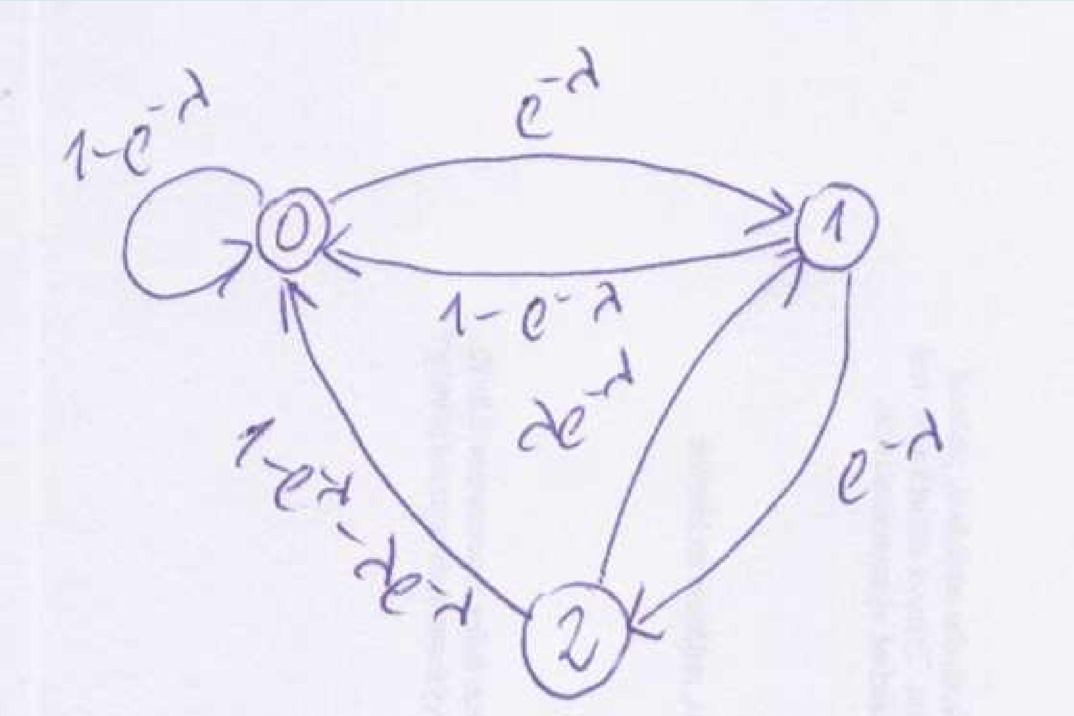
$$p_{20} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 2) = P(Y_n \geq 2) = 1 - P(Y_n = 0) - P(Y_n = 1) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

$$p_{21} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 2) = P(Y_n = 1) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$p_{22} = P(X_{n+1} = 2 / X_n = 2) = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



4.12. Příklad: Je dán je homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1} a maticí přechodu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Jaký je tvar této matice po n krocích?

Řešení: V teorii matice se dokazuje Perronův vzorec: $\mathbf{P}^n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{\,n} \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou vlastní čísla matice **P** (protože **P** je stochastická matice, je aspoň jedno vlastní číslo rovno 1), $\mathbf{w}_i$ je sloupcový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i ($\mathbf{P}\,\mathbf{w}_i = \lambda_i\,\mathbf{w}_i$) a $\mathbf{v}_i$ je řádkový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i ($\mathbf{v}_i\mathbf{P} = \lambda_i\mathbf{v}_i'$). Přitom vektory $\mathbf{w}_i$ a $\mathbf{v}_i$ jsou ortogonální.

Nejdříve vypočítáme vlastní čísla matice **P**: $0 = |\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0{,}7-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1{,}3\lambda + 0{,}3 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0{,}3 \end{matrix} \right.$

Stanovíme sloupcové vlastní vektory: $\mathbf{P}\,\mathbf{w}_i = \lambda_i\,\mathbf{w}_i$

i = 1: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, i = 2: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} = 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -4/7 \end{pmatrix}$

Stanovíme řádkové vlastní vektory:

$\mathbf{v}_i\mathbf{P} = \lambda_i\mathbf{v}_i'$

i = 1: $(v_{11}, v_{12}) \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (4/7, 3/7)$, i = 2: $(v_{21}, v_{22}) \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -1)$

Celkem: $\mathbf{P}^n = 1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (4/7, 3/7) + 0{,}3^n \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ -4/7 \end{pmatrix} \cdot (1, -1) = \ldots = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix} + 0{,}3^n \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

4.13. Poznámka: Uvažme homogenní markovský řetězec, který má množinu stavů J = {0, 1, 2}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1/2, 1/3, 1/6) a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ukážeme si, jak lze simulovat realizace tohoto řetězce pomocí MATLABu.

Nejprve získáme počáteční stav řetězce:

Vygenerujeme náhodné číslo u z intervalu (0,1). Interval (0,1) rozdělíme na tři podintervaly podle kumulativních součtů vektoru počátečních pravděpodobností.

Je-li $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak X(0)=0. Je-li $u \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right)$, pak X(0)=1. Je-li $u \in \left\langle \frac{5}{6}, 1 \right)$, pak X(0)=2.

Při simulaci dalších realizací i = 1, 2, …, n postupujeme podle kumulativních součtů v jednotlivých řádcích matice **P**:

Vždy vygenerujeme náhodné číslo u z intervalu (0,1).

Je-li X(i-1)=0 $\wedge u \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, pak X(i)=0. Je-li X(i-1)=0 $\wedge u \in \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right)$, pak X(i)=1.

Je-li X(i-1)=1 $\wedge u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak X(i)=0. Je-li X(i-1)=1 a $\wedge$ $u \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$, pak X(i)=1. Je-li X(i-1)=1 a $\wedge u \in \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right)$, pak X(i)=2.

Je-li X(i-1)=2 $\wedge u \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, pak X(i)=1. Je-li X(i-1)=0 $\wedge u \in \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right)$, pak X(i)=2.

```
function [realizace]=simulace_MR(n)
% funkce generuje prvnich n realizaci MR
% vektor pocatecnich pravdepodobnosti je [1/2 1/3 1/6]
% matice prechodu je [1/3 2/3 0;1/2 1/4 1/4;0 3/4 1/4]
% syntaxe: [realizace]=simulace_MR(n)
% vstupni parametr: n ... pocet kroku simulace
% vystupni parametr: realizace ... vektor realizaci MR
realizace=[];
u=unifrnd(0,1,1,1);
if u<1/2 j=0;end
if u>=1/2 & u<=5/6 j=1;end
if u>=5/6 j=2;end
realizace=[realizace j];
for i=1:n
   u=unifrnd(0,1,1,1);
   if realizace(i)==0 & u<1/3 j=0;end
   if realizace(i)==0 & u>=1/3 j=1;end
   if realizace(i)==1 & u<1/2 j=0;end
   if realizace(i)==1 & u>=1/2 & u<3/4 j=1;end
   if realizace(i)==1 & u>=3/4 j=2;end
   if realizace(i)==2 & u<3/4 j=1;end
   if realizace(i)==2 & u>=3/4 j=2;end
   realizace=[realizace j];
end
plot(realizace,'o')
axis([-1 n+2 -0.2 2.2])
```