6. Odhady absolutních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu v HMŘ

6.1. Poznámka: Předpokládejme, že HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s konečným počtem stavů k má vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0))$ a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$. Tyto pravděpodobnosti však neznáme, můžeme je pouze odhadnout na základě dlouhodobého pozorování systému.

Podívejme se nejprve na odhad pravděpodobností přechodu. Pro $i,j = 1, \dots, k$ označme:

c_{ij} … počet pozorování přechodu systému ze stavu i do stavu j

$c_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}$ … celkový počet přechodů, které začínaly ve stavu i (je-li i absorpční stav, $c_i = 0$)

Bodové odhady pravděpodobností přechodu získáme takto:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_{ij}}{c_i} & \text{pro } c_i \neq 0 \\ 0 & \text{pro } c_i = 0 \end{cases}.$$

Je-li splněna podmínka $\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})c_i >$ (tzv. podmínka dobré aproximace), můžeme spočítat též $100(1-\alpha)\%$ asymptotický interval spolehlivosti pro p_{ij}. Jeho meze jsou:

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})}{c_i}}\, u_{1-\alpha/2}.$$

Odhad počátečních pravděpodobností lze získat na základě náhodného výběru. Nechť d je rozsah náhodného výběru a d_i je počet těch složek náhodného výběru, které se na počátku pozorování nacházely ve stavu i, i = 1, 2, …, k. Přitom $d = \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Bodový odhad $p_i(0)$: $\hat{p}_i(0) = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \dots, k.$

Za splnění podmínky $\hat{p}_i(0)\left[1 - \hat{p}_i(0)\right] d > 9$ lze sestrojit 100(1-α)% asymptotický interval spolehlivosti pro $p_i(0)$. Jeho meze jsou:

$$\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)\left[1 - \hat{p}_i(0)\right]}{d}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

6.2. Příklad: V jistém regionu bylo náhodně vybráno 2501 domácností. Bylo zjištěno, že k určitému datu 629 domácností nepředplácelo žádný deník, 750 předplácelo regionální deník a zbytek celostátní deník. Z těch domácností, které neměly žádné předplatné, hodlá v příštím měsíci 126 předplácet regionální a 63 celostátní deník.Z domácností, které předplácejí regionální deník, u něj v příštím měsíci zůstane 525 domácností a 75 začne předplácet celostátní deník. A nakonec z těch domácností, které předplácejí celostátní deník, 673 nezmění předplatné a 112 přejde na předplatné regionálního deníku. Modelujte situaci pomocí homogenního markovského řetězce a najděte bodové a intervalové odhady (se spolehlivostí 95 %) počátečních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3}, kde $X_n = 1$, když v n-tém měsíci náhodně vybraná domácnost nemá žádné předplatné, $X_n = 2$, když má předplatné na regionální deník a $X_n = 3$, když má předplatné na celostátní deník. Údaje obsažené v textu úlohy uspořádáme do tabulky:

	1	2	3	Σ
1	440	126	63	629
2	150	525	75	750
3	337	112	673	1122
Σ				2501

Nejprve odhadneme počáteční pravděpodobnosti podle vzorce $\hat{p}_i(0) = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \ldots, k$. V našem případě k = 3, $d_1 = 629$, $d_2 = 750$, $d_3 = 1122$, d = 2501.

$$\hat{p}_1(0) = \frac{629}{2501} = 0{,}2515, \quad \hat{p}_2(0) = \frac{750}{2501} = 0{,}2999, \quad \hat{p}_3(0) = \frac{1122}{2501} = 0{,}448$$

Odhad vektoru počátečních pravděpodobností: $\hat{p}(0) = (0{,}25; 0{,}30; 0{,}45)$.

Znamená to, že na počátku sledování 25 % domácností v daném regionu nemělo žádné předplatné, 30 % předplácelo regionální deník a 45 % celostátní deník.

Před výpočtem intervalů spolehlivosti ověříme, zda jsou splněny podmínky dobré aproximace $n\hat{p}_i(0)(1-\hat{p}_i(0)) > 9$. Přitom

$\hat{p}_1(0) = \frac{629}{2500}$, $\hat{p}_2(0) = \frac{750}{2500}$, $\hat{p}_3(0) = \frac{1122}{2500}$, $n = 2500$. Tedy

i = 1: $\frac{629}{2500}\left(1 - \frac{629}{2500}\right) 2500 = \ldots 6$,

i = 2: $\frac{750}{2500}\left(1 - \frac{750}{2500}\right) 2500 = \ldots 2$,

i = 3: $\frac{1122}{2500}\left(1 - \frac{1122}{2500}\right) 2500 = \ldots 1$.

Vidíme, že podmínky jsou splněny. Pro i = 1, 2, 3 a $\alpha = 0{,}05$ dosadíme do vzorce $\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)(1-\hat{p}_i(0))}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$.

Dostaneme meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$.

$p_1(0) \in \langle 0{,}2345;\ 0{,}268\ldots\rangle$, $p_2(0) \in \langle 0{,}28\ldots;\ 0{,}31\ldots\rangle$, $p_3(0) \in \langle 0{,}429\ldots;\ 0{,}468\ldots\rangle$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Interpretujeme např. 1. interval spolehlivosti: Ve sledovaném regionu je k danému datu s pravděpodobností 95 % 23,45 % až 26,85 % domácností, které nepředplácejí žádný deník.

Nyní se budeme věnovat odhadům pravděpodobností přechodu. Použijeme vzorec $\hat{p}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}, i, j = 1, ..., k.$

Znovu uvedeme tabulku se zadanými údaji:

	1	2	3	Σ
1	440	126	63	629
2	150	525	75	750
3	337	112	673	1122
Σ				2501

V našem případě k = 3,
$c_{11} = 440$, $c_{12} = 126$, $c_{13} = 63$, $c_1 = 629$,

$c_{21} = 150$, $c_{22} = 525$, $c_{23} = 75$, $c_2 = 750$,

$c_{31} = 337$, $c_{32} = 112$, $c_{33} = 673$, $c_3 = 1122$.

$$\hat{p}_{11} = \frac{440}{629} = 0{,}6995, \quad \hat{p}_{12} = \frac{126}{629} = 0{,}2003, \quad \hat{p}_{13} = \frac{63}{629} = 0{,}100$$

$$\hat{p}_{21} = \frac{150}{750} = 0{,}2, \quad \hat{p}_{22} = \frac{525}{750} = 0{,}7, \quad \hat{p}_{23} = \frac{75}{750} = 0{,}1$$

$$\hat{p}_{31} = \frac{337}{1122} = 0{,}3004, \quad \hat{p}_{32} = \frac{112}{1122} = 0{,}0998, \quad \hat{p}_{33} = \frac{673}{1122} = 0{,}599$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Interpretujeme např. 1. řádek odhadnuté matice přechodu: Pokud v jednom měsíci náhodně vybraná domácnost neodebírala žádný deník, tak v příštím měsíci s pravděpodobností 0,7 opět nebude mít žádné předplatné, s pravděpodobností 0,2 si předplatí regionální deník a s pravděpodobností 0,1 celostátní deník.

Před výpočtem intervalů spolehlivosti ověříme splnění podmínek dobré aproximace $\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})c_i >$ [illegible]. Připomínáme, že

$c_{11} = 440$, $c_{12} = 126$, $c_{13} = 63$, $c_1 = 629$,
$c_{21} = 150$, $c_{22} = 525$, $c_{23} = 75$, $c_2 = 750$,
$c_{31} = 337$, $c_{32} = 112$, $c_{33} = 673$, $c_3 = 1122$.

i = 1: $\frac{440}{629}\left(1-\frac{440}{629}\right)629 =$ [illegible], $\frac{126}{629}\left(1-\frac{126}{629}\right)629 =$ [illegible], $\frac{63}{629}\left(1-\frac{63}{629}\right)629 =$ [illegible]

i = 2: $\frac{150}{750}\left(1-\frac{150}{750}\right)750 =$ [illegible], $\frac{525}{750}\left(1-\frac{525}{750}\right)750 =$ [illegible], $\frac{75}{750}\left(1-\frac{75}{750}\right)750 =$ [illegible]

i = 3: $\frac{337}{1122}\left(1-\frac{337}{1122}\right)1122 =$ [illegible], $\frac{112}{1122}\left(1-\frac{112}{1122}\right)1122 =$ [illegible], $\frac{673}{1122}\left(1-\frac{673}{1122}\right)1122 =$ [illegible]6

Ve všech devíti případech jsou podmínky dobré aproximace splněny, můžeme tedy spočítat meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu. Pro i, j = 1, 2, 3 a $\alpha =$ [illegible] dosadíme do vzorce

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})}{c_i}}\, u_{1-\alpha/2}.$$

$p_{11} \in \langle 0,6637; 0,7354 \rangle$, $p_{12} \in$ [illegible], $p_{13} \in$ [illegible],
$p_{21} \in$ [illegible], $p_{22} \in$ [illegible], $p_{23} \in$ [illegible],
$p_{31} \in$ [illegible], $p_{32} \in$ [illegible], $p_{33} \in$ [illegible].

Interpretujeme např. interval spolehlivosti pro p_{11}: Pokud v jednom měsíci náhodně vybraná domácnost neodebírala žádný deník, tak v příštím měsíci můžeme se spolehlivostí 95 % zaručit, že s pravděpodobností 66,37 % až 73,54 % opět nebude odebírat žádný deník.

7. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

7.1. Označení: Označení prvků matice $\mathbf{P}^n$

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J a s maticí přechodu **P**. Prvky matice $\mathbf{P}^n$ budeme značit $p_{ij}(n)$.

7.2. Definice: Definice doby prvního návratu do stavu j

Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ vychází ze stavu j, tj. $P(X_0 = j) = 1$. Zavedeme množinu $T_j = \{n > 0 : X_n = j\}$, která udává pořadí okamžiků návratů do stavu j. Náhodná veličina

$$\tau_j = \begin{cases} \min T_j & \text{pro } T_j \neq \emptyset \\ \infty & \text{pro } T_j = \emptyset \end{cases}$$

se nazývá doba prvního návratu do stavu j.

7.3. Označení: Označení pravděpodobnostní funkce doby prvního návratu do stavu j

Náhodná veličina τ_j je diskrétní náhodná veličina, nabývá hodnot 1, 2, 3, ... Její pravděpodobnostní funkci označíme $f_j(n)$, tedy $f_j(n) = P(\tau_j = n)$, n = 1, 2, 3, ... (pro n = 0 položíme $f_j(0) = 0$). Pravděpodobnost, že homogenní markovský řetězec vycházející ze stavu j, se vůbec někdy vrátí do stavu j, je tedy $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$. Pravděpodobnost f_j lze vyjádřit jako $P(\tau_j < \infty)$.

7.4. Věta: Souvislost pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu s pravděpodobnostmi přechodu

Pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu do stavu j souvisí s pravděpodobnostmi přechodu takto:

$$\forall j \in J: p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}(n-k) f_j(k), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtud lze $f_j(n)$ vyjádřit pomocí rekurentního vztahu:

$$\forall j \in J: p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k) + f_j(n) \Rightarrow f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k).$$

Důkaz:

Pro k = 1, 2, 3, ... označme jev $A_k = (\tau_j = k \wedge X_n = j)$. Jevy A_k jsou neslučitelné a $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (X_n = j)$. Počítáme

$$p_{jj}(n) = P(X_n = j / X_0 = j) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k / X_0 = j\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k / X_0 = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j \wedge \tau_j = k / X_0 = j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(\tau_j = k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge \tau_j = k) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \dots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_j(k) P(X_n = j / X_k = j) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) p_{jj}(n-k)$$

7.5. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$. Je-li vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$, vypočtěte pravděpodobnost, že doba 1. návratu do stavu 0 bude n, n = 1, 2, 3, ... a vypočtěte pravděpodobnost, že řetězec se vůbec někdy vrátí do stavu 0.

Řešení: $\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2+\alpha\beta & \alpha(1-\alpha)+\alpha(1-\beta) \\ \beta(1-\alpha)+\beta(1-\beta) & \alpha\beta+(1-\beta)^2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2+\alpha\beta & \alpha(1-\alpha)+\alpha(1-\beta) \\ \beta(1-\alpha)+\beta(1-\beta) & \alpha\beta+(1-\beta)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3+2(1-\alpha)\alpha\beta+(1-\beta)\alpha\beta & 1-p_{00}(3) \\ 1-p_{11}(3) & (1-\alpha)\alpha\beta+2(1-\beta)\alpha\beta+(1-\beta)^3 \end{pmatrix}$$

$f_0(1) = p_{00} = 1 - \alpha$

$f_0(2) = p_{00}(2) - p_{00}f_0(1) = (1 - \alpha)^2 + \alpha\beta - (1 - \alpha)^2 = \alpha\beta$

$f_0(3) = p_{00}(3) - p_{00}(2)f_0(1) - p_{00}f_0(2) = (1 - \alpha)^3 + 2(1 - \alpha)\alpha\beta + (1 - \beta)\alpha\beta - [(1 - \alpha)^2 + \alpha\beta](1 - \alpha) - (1 - \alpha)\alpha\beta = (1 - \alpha)^3 + 2(1 - \alpha)\alpha\beta + (1 - \beta)\alpha\beta - (1 - \alpha)^3 - (1 - \alpha)\alpha\beta - (1 - \alpha)\alpha\beta = (1 -\beta)\alpha\beta$

Obecně: $f_0(n) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{pro } n = 1 \\ (1-\beta)^{n-2}\alpha\beta & \text{pro } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = 1-\alpha + \sum_{n=2}^{\infty}(1-\beta)^{n-2}\alpha\beta = 1-\alpha+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}(1-\beta)^k = 1-\alpha+\frac{\alpha\beta}{\beta} = 1$$

7.6. Definice: Definice trvalého a přechodného stavu

Nechť $\{X_n; n \in$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

a) Stav $j \in$ se nazývá trvalý, jestliže $f_j = 1$ (tj. $P(\tau_j < \infty)$). (Znamená to, že řetězec se do stavu j vrátí po konečně mnoha krocích.)

b) Stav $j \in$ se nazývá přechodný, jestliže $f_j < 1$ (tj. $P(\tau_j = \infty)$). (Znamená to, že řetězec se do stavu j s kladnou pravděpodobností nikdy nevrátí.)

Množina trvalých stavů se značí J_T, množina přechodných stavů J_P. Přitom $J_T \cup J_P =$, $J_T \cap J_P =$.

7.7. Věta: Kritérium pro klasifikaci trvalých a přechodných stavů.

a) Stav j je trvalý, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) =$.

b) Stav j je přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) <$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

7.8. Příklad: Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých hodů kostkou. Nechť náhodná veličina X_n udává maximální číslo dosažené v prvních n hodech, n = 1, 2, 3, ... Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s množinou stavů J = {1, 2, ..., 6}, kde $X_n = j$, když v prvních n hodech bylo nejvyšší dosažené číslo j. Najděte matici přechodu **P** a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zajímají nás jen diagonální prvky matice $\mathbf{P}^n$, protože zkoumáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$.

$$p_{11} = \frac{1}{6},\ p_{11}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2,\ p_{11}(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \ldots$$

$$p_{22} = \frac{2}{6},\ p_{22}(2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2,\ p_{22}(3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 \ldots$$

Obecně: $p_{jj}(n) = \left(\frac{j}{6}\right)^n$, j = 1, ..., 6

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{6}\right)^n$ absolutně konverguje pro j = 1, 2, 3, 4, 5 a diverguje pro j = 6. Tedy $J_T = \{6\}$, $J_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7.9. Definice: Definice trvalého nenulového stavu a trvalého nulového stavu

Nechť $j \in$ je trvalý stav homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in \}$.

a) Stav j se nazývá trvalý nenulový, jestliže existuje střední hodnota μ_j náhodné veličiny τ_j.

b) Stav j se nazývá trvalý nulový, jestliže střední hodnota náhodné veličiny τ_j neexistuje.

7.10. Důsledek: Kritérium pro klasifikaci trvalých nenulových stavů a trvalých nulových stavů

Stav j je trvalý nenulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ absolutně konverguje.

Stav j je trvalý nulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ diverguje.

6.11. Poznámka: Lze ukázat, že HMŘ s konečnou množinou stavů nemůže mít trvalé nulové stavy.

7.12. Definice: Definice periodického stavu, neperiodického stavu, ergodického stavu

Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro něž $p_{jj}(n) > 0$.

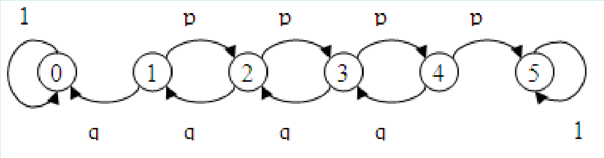
Je-li $d_j > 1$, pak řekneme, že stav j je periodický s periodou d_j.

Je-li $d_j = 1$, pak řekneme, že stav j je neperiodický.

Trvalý nenulový neperiodický stav se nazývá ergodický stav.

7.13. Příklad: Na úsečce délky 5 jsou vyznačeny body 0, 1, ..., 5. V bodě 3 se nachází kulička. Kulička koná náhodnou procházku po úsečce tak, že s pravděpodobností p se posune o jednotku napravo a s pravděpodobností q = 1 – p se posune o jednotku nalevo. Dosáhne-li bodu 0 nebo bodu 5, setrvá tam. Popište proces pomocí homogenního markovského řetězce a klasifikujte stavy na periodické a neperiodické.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je kulička v bodě j.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{00}(n) = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ stav 0 je neperiodický.

$p_{55}(n) = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ stav 5 je neperiodický.

$p_{11}(1) = 0$, $p_{11}(2) = pq$, $p_{11}(3) = 0$, $p_{11}(4) = pqp$, ... Největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... je 2, tedy stav 1 je periodický s periodou 2. Stejně to dopadne se stavy 2, 3, 4.

7.14. Věta: Výpočet střední hodnoty doby 1. návratu do ergodického stavu a trvalého nenulového periodického stavu

a) Nechť $j \in$ je trvalý nenulový neperiodický stav (tj. ergodický stav). Pak $\mu_j = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} p_{jj}(n)}$.

b) Nechť $j \in$ je trvalý nenulový periodický stav s periodou d_j. Pak $\mu_j = \frac{d_j}{\lim_{n \to \infty} p_{jj}(n d_j)}$.

7.15. Příklad: Nechť je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vypočtěte střední hodnoty dob 1. návratů do stavů 0, 1, 2.

Řešení: Jelikož matice **P** je regulární matice, bude matice $\mathbf{P}^n$ konvergovat k limitní matici, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a** matice **P**.

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{6} \\ a_1 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_2 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} \\ a_0 &+ a_1 + a_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{25} \\ a_1 &= \frac{10}{25} \\ a_2 &= \frac{9}{25} \end{aligned} \quad \mathbf{p} = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25}\right), \ \boldsymbol{\mu} = \left(\frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9}\right)$$

Vychází-li řetězec např. ze stavu 1, tak v průměru po 2,5 krocích se tam vrátí.