8. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

8.1. Definice: Definice dosažitelných a sousledných stavů

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

a) Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i, když existuje $n \geq 1$ tak, že $p_{ij}(n) > 0$.

Pokud $p_{ij}(n) = 0$ pro všechna $n \geq 1$, pak řekneme, že stav j není dosažitelný ze stavu i.

b) Řekneme, že stav j je sousledný se stavem i, jestliže j je dosažitelný z i a i je dosažitelný z j.

(Symbolicky se dosažitelnost stavu j ze stavu i označuje takto: $i \rightarrow j$ a souslednost stavů i, j se označuje takto: $i \leftrightarrow j$.)

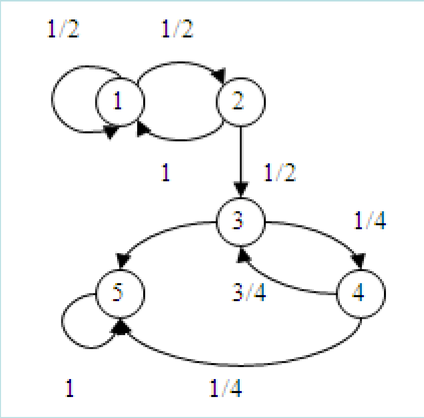
8.2. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů

$J = \{1, 2, ..., 5\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

Řešení:

Přechodový diagram



Tabulka dosažitelných stavů

stav	dosažitelný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+

Tabulka sousledných stavů

stav	sousledný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	-	-	+	+	-
4	-	-	+	+	-
5	-	-	-	-	+

8.3. Definice: Definice třídy trvalých stavů a třídy přechodných stavů

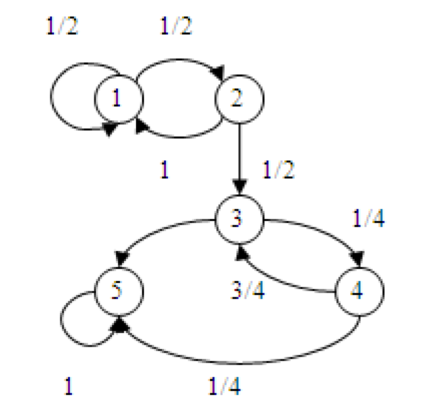
Neprázdná množina stavů $C \subseteq$ se nazývá třída trvalých stavů, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný ze žádného stavu uvnitř C. Množina stavů, která není třídou trvalých stavů, se nazývá třída přechodných stavů.

8.4. Příklad: Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení:

Nejprve uvedeme matici přechodu. Nakreslíme přechodový diagram.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Z diagramu je zřejmé, že když řetězec vstoupí do třídy stavů {1, 2} nebo {5}, není odtud dosažitelný žádný stav vně třídy {1, 2} resp. {5}, tedy $J_T = \{1, 2\} \cup \{5\}$. Když řetězec vstoupí do třídy stavů {3, 4}, je odtud dosažitelný stav 5, tedy $J_P = \{3, 4\}$.

8.5. Poznámka: Poznámka o podřetězci homogenního markovského řetězce

Jestliže v matici přechodu **P** vynecháme ty řádky a sloupce, které odpovídají stavům nepatřícím do třídy trvalých stavů C, dostaneme opět stochastickou matici. Lze ji považovat za matici přechodu homogenního markovského řetězce s množinou stavů C. Nazývá se podřetězec původního řetězce. Např. pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. , který má

matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dostaneme podřetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.6. Důsledek: Důsledek pro třídu trvalých stavů a pro třídu přechodných stavů

a) Řetězec nikdy neopustí třídu trvalých stavů, jakmile do ní jednou vstoupí.

b) Řetězec se nikdy nevrátí do třídy přechodných stavů, jakmile ji jednou opustí.

8.7. Věta: Kritérium pro stanovení třídy trvalých stavů

Množina stavů $C \subseteq$ je třída trvalých stavů, právě když $p_{ij} = 0$ pro $\forall \in$, $j \notin$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.8. Definice: Definice rozložitelného a nerozložitelného homogenního markovského řetězce

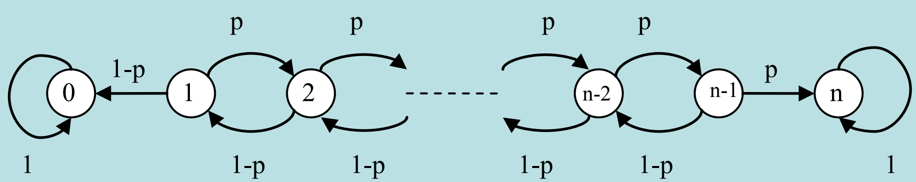
Homogenní markovský řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže všechny jeho stavy jsou sousledné. V opačném případě říkáme, že řetězec je rozložitelný.

Ekvivalentní definice: HMŘ se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm neexistuje jiná třída trvalých stavů než J.

8.9. Věta: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice přechodu (po případném přečíslování stavů) tvar $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$. **B** jsou čtvercové matice.

Důkaz: viz Prášková, str. 37.

8.10. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., N-1, N} a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení: Z přechodového diagramu okamžitě vyplývá, že stavy 0 a N jsou sousledné jenom samy se sebou.

Ostatní stavy 1, 2, ..., N-1 jsou sousledné, řetězec je tedy rozložitelný a $J_T = \{0\} \cup \{N\}$, $J_P = \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

8.11. Definice: Definice stavů stejného typu

Řekneme, že stavy $i, j \in$ homogenního markovského řetězce jsou stejného typu, jestliže jsou oba

a) přechodné

b) trvalé nenulové

c) trvalé nulové

d) neperiodické

e) periodické s touž periodou.

8.12. Věta: Věta o solidaritě

Jsou-li stavy i a j sousledné, pak jsou stejného typu.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.13. Důsledek: Důsledek pro nerozložitelný homogenní markovský řetězec

V nerozložitelném homogenním markovském řetězci jsou všechny stavy stejného typu. Má-li nerozložitelný homogenní markovský řetězec konečnou množinu stavů, pak jsou všechny stavy trvalé nenulové.

8.14. Věta: Věta o stacionárním rozložení nerozložitelného HMŘ

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec . Pak platí:

1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, pak stacionární rozložení neexistuje.

2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozložení existuje a je jediné.

 2a) Jsou-li všechny stavy neperiodické, pak $a_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) > 0, i, j \in S$ a také $a_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) > 0, j \in S$

 2b) Jsou-li všechny stavy periodické, pak $a_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) > 0, i, j \in S$ a také $a_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_j(k) > 0, j \in S$

8.15. Důsledek: V nerozložitelném homogenním markovském řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozloženi existuje.

8.16. Věta: Věta o množině stavů dosažitelných z trvalého stavu.

Nechť stav i je dosažitelný z nějakého trvalého stavu j. Pak platí:

a) stav i je trvalý stav stejného typu jako stav j

b) i a j jsou sousledné stavy

c) $f_{ji} = f_{ij} = 1$ (tj. pravděpodobnost, že řetězec vycházející ze stavu j resp. i vůbec někdy vstoupí do stavu i resp. j, je rovna 1).

(Znamená to, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu j je množina trvalých stavů a tvoří nerozložitelný podřetězec původního řetězce.)

8.17. Poznámka:

Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že v rozložitelném řetězci existují jen dvě třídy stavů. Znamená to, že současným přečíslováním stavů v matici přechodu lze vytvořit nulové submatice.

Dostáváme pak buď matici typu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ jsou čtvercové matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami stavů, přičemž obě třídy jsou třídy trvalých stavů,

nebo typu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}$ jsou čtvercové matice, přičemž $\mathbf{P}_1$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi stavy trvalými stavy, matice $\mathbf{Q}$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy a matice $\mathbf{R}$ je tvořena pravděpodobnostmi přechodu z přechodných do trvalých stavů.

Je-li matice **P** rozložitelná na tvar

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{0}$ jsou nulové čtvercové matice, bude systém oscilovat mezi dvěma třídami přechodných stavů a příslušná matice **P** bude popisovat periodický řetězec.

8.18. Poznámka: poznámka o rozkladu konečné množiny stavů J a o kanonickém tvaru matice přechodu

Předpokládejme nyní, že rozložitelný HMŘ je tvořen jak trvalými, tak přechodnými stavy, přičemž má r tříd trvalých stavů. Věta 8.15. umožní rozložit množinu stavů J takto:

Nechť j_1 je trvalý stav s nejnižším indexem a J_1 je množina všech stavů dosažitelných z j_1.

Nechť j_2 je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do J_1 a nechť J_2 je množina všech stavů dosažitelných z j_2 atd.

Lze tedy psát $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_r \cup J_P$, kde $J_1, J_2, \ldots, J_r$ jsou neslučitelné množiny trvalých stavů a J_P je množina stavů přechodných. Je-li J konečná množina, pak matici přechodu **P** lze psát v tzv. kanonickém tvaru (po eventuálním přečíslování stavů).

Kanonický tvar matice **P**

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">J</td><td colspan="4">J_T</td><td rowspan="2">J_P</td></tr>
<tr><td>J_1</td><td>J_2</td><td>...</td><td>J_r</td></tr>
<tr><td rowspan="4">J_T</td><td>J_1</td><td>$\mathbf{P_1}$</td><td>Ø</td><td>...</td><td>Ø</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td>J_2</td><td>Ø</td><td>$\mathbf{P_2}$</td><td>...</td><td>Ø</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>J_r</td><td>Ø</td><td>Ø</td><td>...</td><td>$\mathbf{P_r}$</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td colspan="2">J_P</td><td>$\mathbf{R_1}$</td><td>$\mathbf{R_2}$</td><td>...</td><td>$\mathbf{R_r}$</td><td>$\mathbf{Q}$</td></tr>
</table>

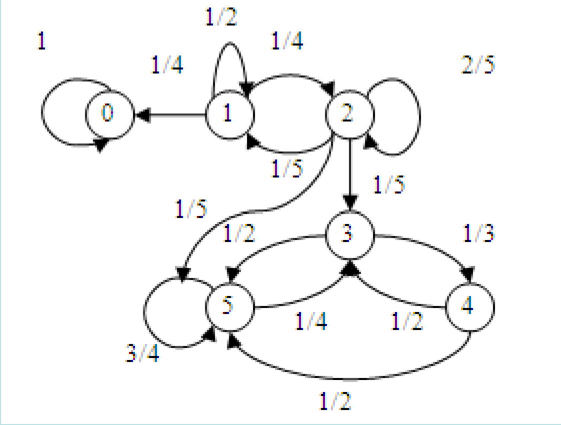
$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r$ jsou matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami trvalých stavů $J_1, \ldots, J_r$. Matice $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_r$ obsahují pravděpodobnosti přechodu mezi třídami přechodných a trvalých stavů. Matice **Q** obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy.

8.19. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1, ..., 5\}$ a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$ Najděte kanonický tvar matice **P**.

Řešení:

Přechodový diagram



$J_1 = \{0\}$, $J_2 = \{3, 4, 5\}$, $J_P = \{1, 2\}$.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že

$$\mathbf{P}_1 = (1)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

8.20. Definice: Definice fundamentální matice nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Limitní matici přechodu označme **A**. Fundamentální matici **Z** tohoto řetězce definujeme vztahem: $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$.

8.21. Věta: Věta o výpočtu středních hodnot dob prvních vstupů

Označme m_{ij} střední hodnotu doby 1. vstupu řetězce do stavu j za předpokladu, že vychází ze stavu i. Sestavíme matici $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j \in J}$. Pak $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}})\hat{\mathbf{M}}$, kde **E** je matice ze samých jedniček, matice $\hat{\mathbf{Z}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **Z** a matice $\hat{\mathbf{M}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **M**.

8.22. Příklad: Při dlouhodobém sledování velkého souboru voličů s časovým krokem 1 měsíc byly zkoumány volební preference. Rozlišujeme strany A, B, C a Ostatní. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4}, kde $X_n = 1$, když náhodně vybraný volič preferuje v n-tém měsíci stranu A, $X_n = 2$ pro stranu B, $X_n = 3$ pro stranu C a $X_n = 4$ pro ostatní strany. Pravděpodobnosti přechodu sympatií voličů jsou uvedeny v matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}14 \\ 0{,}01 & 0{,}82 & 0{,}05 & 0{,}12 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}03 & 0{,}92 \end{pmatrix}$$

. Najděte limitní matici přechodu a vypočtěte matici středních hodnot dob prvních přechodů.

Řešení: Limitní matici přechodu získáme složením čtyř stacionárních vektorů. Stacionární vektor existuje, neboť již matice $\mathbf{P}^2$ má všechny prvky kladné.

Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$ s podmínkou $\sum_{j=1}^{4} a_j = 1$ získáme stacionární vektor: $\mathbf{a} = (0{,}1328;\ 0{,}0881;\ 0{,}1843;\ 0{,}5949)$.

Znamená to, že během dlouhé doby může strana A očekávat 13,3% voličů, strana B 8,8%, strana C 18,4% a ostatní strany dohromady 59,5%.

Limitní matice přechodu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice **A**: Pokud volič v jednom měsíci preferoval stranu A, pak v následujícím měsíci ji bude s pravděpodbností 13,3% preferovat opět. Ke straně B se přikloní s pravděpodobností 8,8%, ke straně C s pravděpodobností 18,4% a s pravděpodobností 59,5% zvolí některou z ostatních stran.

K výpočtu matice středních hodnot dob prvních přechodů potřebujeme fundamentální matici **Z**:

$$\mathbf{Z} = \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{P} - \mathbf{A}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0,2999 & 0,2549 & -2,1411 \\ -0,7741 & 4,7037 & -0,531 & -2,3986 \\ -0,2863 & 0,4354 & 3,6153 & -2,7644 \\ -0,1508 & -0,7502 & -0,7885 & 2,6895 \end{pmatrix}.$$

Matice $\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,6153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6895 \end{pmatrix}$, matice $\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,1328} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0,0881} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{01843} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0,5949} \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\right)\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 7,5306 & 50 & 18,2353 & 8,1207 \\ 25,3061 & 11,3538 & 22,5 & 8,5535 \\ 21,6327 & 48,4615 & 5,4265 & 9,1686 \\ 20,6122 & 61,9231 & 23,8971 & 1,6811 \end{pmatrix}$.

Interpretace 1. řádku matice **M**: Volič, který na začátku sledování preferoval stranu A, v průměru za 7,5 měsíce dá poprvé znovu hlas této straně. V průměru za 50 měsíců bude poprvé preferovat stranu B a v průměru za 18,2 měsíce bude poprvé preferovat stranu C. V průměru za 8,1 měsíce se poprvé přikloní k některé z ostatních stran.