9. Absorpční homogenní markovské řetězce

9.1. Definice: Definice absorpčního stavu

Nechť $\{X_n ; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

Řekneme, že stav $j \in J$ je absorpční stav, jestliže $p_{jj} = 1$ (tzn., že ze stavu j není dosažitelný žádný jiný stav). Když řetězec vstoupí do absorpčního stavu, pak řekneme, že je absorbován.

9.2. Věta: Věta o vztahu mezi absorpčním stavem a trvalým stavem

Každý absorpční stav je trvalým stavem.

Důkaz: Plyne přímo z definice trvalého stavu.

9.3. Definice: Definice absorpčního homogenního markovského řetězce

Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá absorpční, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

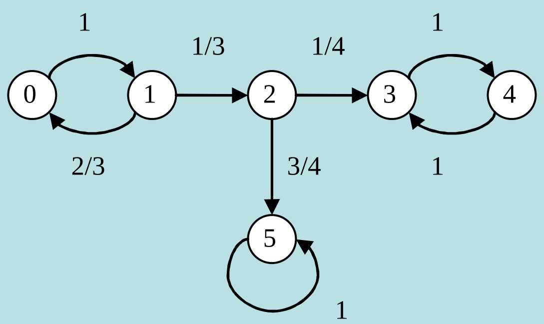
9.4. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1, ..., 5} a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Zjistěte, zda jde o absorpční řetězec.

Řešení:

Přechodový diagram



$J_T = \{3,4\} \cup \{5\}$, $J_P = \{0, 1, 2\}$.

Stavy 3 a 4 jsou trvalé, ale nejsou absorpční. Řetězec tedy není absorpční.

9.5. Definice: Definice fundamentální matice absorpčního řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je absorpční řetězec s konečnou množinou stavů, který má r absorpčních a s neabsorpčních stavů. Stavy přečíslujeme tak, aby po množině J_A r absorpčních stavů následovala množina J_N s neabsorpčních stavů. Matici přechodu **P** přepíšeme do kanonického tvaru $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde

I je jednotková matice řádu r,

0 je nulová matice typu r x s,

R je matice typu s x r obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů a

Q je čtvercová matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Matice $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ (kde **I** je jednotková matice řádu s) se nazývá fundamentální matice absorpčního řetězce.

Vysvětlení: Prvek m_{ij} matice **M** udává střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčním stavu j před přechodem do absorpčního stavu, pokud vyšel z neabsorpčního stavu i. Inverzní matice existuje, pokud $\mathbf{Q}^n$ konverguje k **0**.

9.6. Poznámka: Význam součtu prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**

Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**. Maticový zápis: **t** = **Me**, kde **e** je sloupcový vektor typu s x 1 ze samých jedniček.

9.7. Příklad: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Najděte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

b) Vypočtěte střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech.

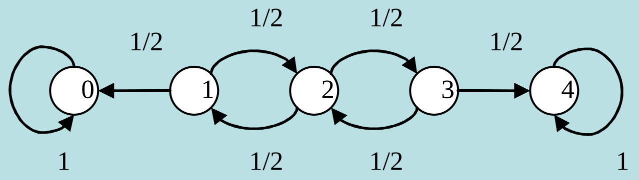
Řešení:

ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, 2, 3, 4}, přičemž $X_n = j$, když v n-tém kroku hry má hráč A právě j Kč.

Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) $J_T = \{0\} \cup \{4\}$, $J_P = \{1, 2, 3\}$. Trvalé stavy 0 a 4 jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

ad c) Matici přechodu v kanonickém tvaru získáme tak, že nejprve zapíšeme pravděpodobnosti přechodu vztahující se k absorpčním stavům 0 a 4 a poté pravděpodobnosti přechodu vztahující se k neabsorpčním stavům 1, 2, 3.

Původní matice přechodu: Matice přechodu v kanonickém tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet fundamentální matice **M** potřebujeme matici **Q** obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace: Podívejme se např. na druhý řádek matice **M**. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak lze očekávat, že před skončením hry bude mít v průměru jedenkrát 1 Kč, dvakrát 2 Kč a jedenkrát 3 Kč.

ad d) Podle poznámky 8.6. dostáváme:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku buď 1 Kč nebo 3 Kč, tak v průměru po třech krocích hra skončí. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak v průměru po čtyřech krocích hra skončí.

9.8. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů

Označme b_{ij} pravděpodobnost, že řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i bude absorbován ve stavu j.

Sestavíme matici **B** = $\left(b_{ij}\right)_{i,j\in J}$.

Pak **B** = **MR**, kde **M** je fundamentální matice absorpčního řetězce a **R** je matice v levém dolním rohu matice přechodu **P** v kanonickém tvaru.

Důkaz: Nechť i je neabsorpční a j absorpční stav. Stavu j může být dosaženo 1. krokem s pravděpodobností p_{ij} nebo přechodem do neabsorpčního stavu k s pravděpodobností p_{ik} a odtud přechodem do absorpčního stavu j s pravděpodobností b_{kj}. Tedy $b_{ij} = \sum_{k\in J} p_{ik} b_{kj}$. Maticově: **B** = **R** + **QB**, **B** – **QB** = **R**, (**I** – **Q**)**B** = **R**, **B** = (**I** – **Q**)$^{-1}$**R** = **MR**.

9.9. Definice: Definice matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce

Matice **B** se nazývá matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce.

9.10. Příklad: Pro zadání z příkladu 9.7. vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky. Pro připomenutí: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

Řešení:

Matice přechodu v kanonickém tvaru: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Již jsme vypočetli, že

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku 1 Kč, pak bude s pravděpodobností 3/4 zruinován on a s pravděpodobností 1/4 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/2 zruinován on a s pravděpodobností 1/2 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 3 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/4 zruinován on a s pravděpodobností 3/4 bude zruinován hráč B.

9.11. Poznámka: Charakteristiky absorpčního řetězce můžeme v MATLABu vypočítat pomocí funkce absorb.m:

```
function [Pk,M,B,t]=absorb(P)
% funkce pro výpočet základních charakteristik absorpčního řetězce
% Autor: Stanislav Tvrz
% function [Pk,M,B,t]=absorb(P)
% vstupní parametr: matice přechodu P
% výstupní parametry: Pk ... matice přechodu v kanonickém tvaru
%                   M ... fundamentální matice
%                   B ... matice přechodu do absorpčních stavů
%                   t ... vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí

%vypíše pro kontrolu přechodovou matici P
P
vel=size(P);
[i,j]=find(P==1); % najdu prvky matice P o hodnotě 1
vi=size(i);
st=0; % počet nalezených absorpčních stavů

%převod P na kanonický tvar

for k=1:vi
   if i(k)==j(k)
      st=st+1;

      if st==1 % varianta pro první nalezený absorpční stav
         if (i(k)>1)&(i(k)<vel) % první řádek, pokud odpovídá absorpčnímu stavu se nepřesouvá
           P=[P(i(k),:);P(1:i(k)-1,:);P(i(k)+1:vel,:)]; % přesun k-tého řádku na místo prvního
```

```
P=[P(:,i(k)),P(:,1:i(k)-1),P(:,i(k)+1:vel)]; % přesun k-tého sloupce na místo prvního
          elseif (i(k)==vel)&(st<vel)    % varianta pro přesun posledního řádku/sloupce
            P=[P(i(k),:);P(1:i(k)-1,:)]; % přesun k-tého řádku na místo prvního
            P=[P(:,i(k)),P(:,1:i(k)-1)]; % přesun k-tého sloupce na místo prvního
          end;
       else
         if ((i(k))>st+1)&(i(k)<vel) % varianta pro další nalezený absorpční stav
            P=[P(1:st-1,:);P(i(k),:);P(st:i(k)-1,:);P(i(k)+1:vel,:)]; %přesun k-tého řádku na místo dalšího absorpčního
stavu
            P=[P(:,1:st-1),P(:,i(k)),P(:,st:i(k)-1),P(:,i(k)+1:vel)]; %přesun k-tého sloupce na místo dalšího absorpčního
stavu
         elseif (i(k)==vel)&(st<vel) % varianta pro přesun posledního řádku/sloupce
            P=[P(1:st-1,:);P(i(k),:);P(st:i(k)-1,:)]; %přesun k-tého řádku na místo dalšího absorpčního stavu
            P=[P(:,1:st-1),P(:,i(k)),P(:,st:i(k)-1)]; %přesun k-tého sloupce na místo dalšího absorpčního stavu
         end;
       end;
    end;
end;

%Pk = kanonický tvar přechodové matice
Pk=P
% Q = matice přechodových pravděpodobností mezi přechodnými stavy
Q=[P(st+1:vel,st+1:vel)];

% R = matice přechodových pravděpodobností z přechodných do absorpčních stavů
R=[P(st+1:vel,1:st)];

% M = matice středního počtu kroků strávených v j-tém stavu před absorpcí, pokud řetězec vychází ze stavu i
```

```
M=inv(eye(vel-st)-Q);

% B = matice pravděpodobností, že řetězec bude absorbován j-tým stavem, pokud vychází z i-tého stavu
přechodného
B=M*R;

% t = vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí
t=M*ones(vel-st,1);
```

Použijeme-li tuto funkci na řešení příkladu 9.10., dostaneme výsledky:

```
Pk =
    1.0000         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0
    0.5000         0         0    0.5000         0
         0         0    0.5000         0    0.5000
         0    0.5000         0    0.5000         0

M =
    1.5000    1.0000    0.5000
    1.0000    2.0000    1.0000
    0.5000    1.0000    1.5000

B =
    0.7500    0.2500
    0.5000    0.5000
    0.2500    0.7500

t =
    3.0000
    4.0000
    3.0000
```

9.12. Příklad: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do 30 denních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5}, kde

stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti,

stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti,

stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti,

stav 4 splacené pohledávky a

stav 5 nedobytné pohledávky.

Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou:

$p_{12} = 0{,}77$, $p_{14} = 0{,}23$, $p_{23} = 0{,}34$, $p_{24} = 0{,}66$, $p_{34} = 0{,}73$ a $p_{35} = 0{,}27$.

Úkoly:

a) Sestavte matici přechodu.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.

c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

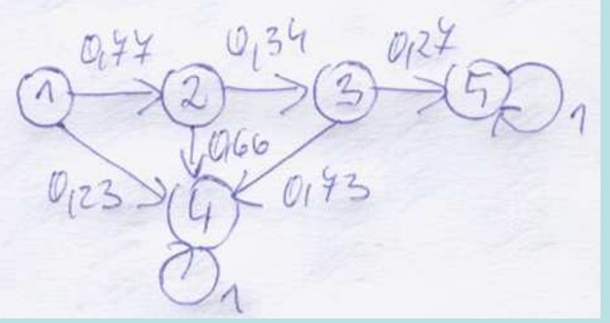
f) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a)

Přechodový diagram:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}23 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0{,}66 & 0 & 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0{,}73 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad c) Vypočteme fundamentální matici absorpčního řetězce:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví 1 x 30 = 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,77 x 30 = 23,1 dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,26 x 30 = 7,8 dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) Vypočteme matici přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) Vypočteme vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 2,03 \\ 1,34 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpretace:

2,03 x 30 = 60,9 – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

1,34 x 30 = 40,2 – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

1 x 30 = 30 – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Připomínáme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.