

9. Absorpční homogenní markovské řetězce

9.1. Definice: Definice absorpčního stavu

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J .

Řekneme, že stav $j \in J$ je **absorpční stav**, jestliže $p_{jj} = 1$ (tzn., že ze stavu j není dosažitelný žádný jiný stav). Když řetězec vstoupí do absorpčního stavu, pak řekneme, že je **absorbován**.

9.2. Věta: Věta o vztahu mezi absorpčním stavem a trvalým stavem

Každý absorpční stav je trvalým stavem.

Důkaz: Plyne přímo z definice trvalého stavu.

9.3. Definice: Definice absorpčního homogenního markovského řetězce

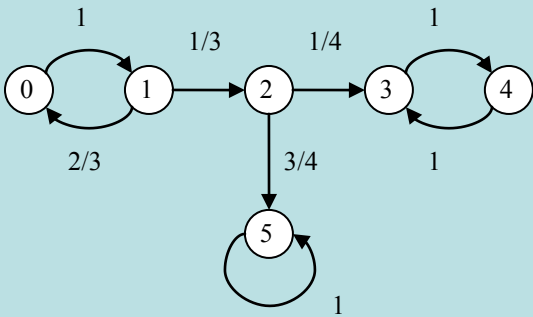
Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá **absorpční**, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

9.4. Příklad: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0, 1, \dots, 5\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Zjistěte, zda jde o absorpční řetězec.}$$

Řešení:

Přechodový diagram



$$J_T = \{3, 4\} \cup \{5\}, J_P = \{0, 1, 2\}.$$

Stavy 3 a 4 jsou trvalé, ale nejsou absorpční. Řetězec tedy není absorpční.

9.5. Definice: Definice fundamentální matice absorpčního řetězce

Nechť $X_{n;n} \in \mathbb{R}_0$ je absorpční řetězec s konečnou množinou stavů, který má r absorpčních a s neabsorpčních stavů. Stavů přečíslujeme tak, aby po množině J_A r absorpčních stavů následovala množina J_N s neabsorpčních stavů. Matici přechodu \mathbf{P}

přepíšeme do kanonického tvaru $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde

\mathbf{I} je jednotková matice řádu r ,

$\mathbf{0}$ je nulová matice typu $r \times s$,

\mathbf{R} je matice typu $s \times r$ obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů a

\mathbf{Q} je čtvercová matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Matice $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}$ (kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu s) se nazývá **fundamentální matice absorpčního řetězce**.

Vysvětlení: Prvek m_{ij} matice \mathbf{M} udává střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčním stavu j před přechodem do absorpčního stavu, pokud vyšel z neabsorpčního stavu i . Inverzní matice existuje, pokud \mathbf{Q}^n konverguje k $\mathbf{0}$.

9.6. Poznámka: Význam součtu prvků v i -tém řádku fundamentální matice \mathbf{M}

Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i -tém řádku fundamentální matice \mathbf{M} . Maticový zápis: $\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e}$, kde \mathbf{e} je sloupcový vektor typu $s \times 1$ ze samých jedniček.

9.7. Příklad: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Najděte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

b) Vypočtěte střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech.

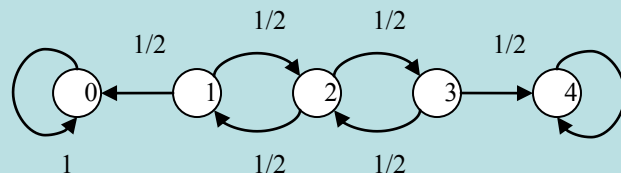
Řešení:

ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, přičemž $X_n = j$, když v n -tém kroku hry má hráč A právě j Kč.

Matice přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) $J_T = \{0\} \cup \{4\}$, $J_P = \{1, 2, 3\}$. Trvalé stavy 0 a 4 jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

ad c) Matici přechodu v kanonickém tvaru získáme tak, že nejprve zapíšeme pravděpodobnosti přechodu vztahující se k absorpčním stavům 0 a 4 a poté pravděpodobnosti přechodu vztahující se k neabsorpčním stavům 1, 2, 3.

Původní matice přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice přechodu v kanonickém tvaru:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet fundamentální matice \mathbf{M} potřebujeme matici \mathbf{Q} obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, M = (I - Q)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace: Podívejme se např. na druhý řádek matice \mathbf{M} . Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak lze očekávat, že před skončením hry bude mít v průměru jedenkrát 1 Kč, dvakrát 2 Kč a jedenkrát 3 Kč.

ad d) Podle poznámky 8.6. dostáváme:

$$t = Me = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku buď 1 Kč nebo 3 Kč, tak v průměru po třech krocích hra skončí. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak v průměru po čtyřech krocích hra skončí.

9.8. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů

Označme b_{ij} pravděpodobnost, že řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i bude absorbován ve stavu j .

Sestavíme matici $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j \in J}$.

Pak $\mathbf{B} = \mathbf{MR}$, kde \mathbf{M} je fundamentální matice absorpčního řetězce a \mathbf{R} je matice v levém dolním rohu matice přechodu \mathbf{P} v kanonickém tvaru.

Důkaz: Necht' i je neabsorpční a j absorpční stav. Stav j může být dosaženo 1. krokem s pravděpodobností p_{ij} nebo přechodem do neabsorpčního stavu k s pravděpodobností p_{ik} a odtud přechodem do absorpčního stavu j s pravděpodobností b_{kj} . Tedy $b_{ij} = \sum_{k \in J} p_{ik} b_{kj}$. Maticově: $\mathbf{B} = \mathbf{R} + \mathbf{QB}$, $\mathbf{B} - \mathbf{QB} = \mathbf{R}$, $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{B} = \mathbf{R}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{MR}$.

9.9. Definice: Definice matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce

Matice \mathbf{B} se nazývá **matice přechodu do absorpčních stavů** daného absorpčního řetězce.

9.10. Příklad: Pro zadání z příkladu 9.7. vypočtete matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky. Pro připomenutí: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

Řešení:

Matice přechodu v kanonickém tvaru: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Již jsme vypočetli, že

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku 1 Kč, pak bude s pravděpodobností 3/4 zruinován on a s pravděpodobností 1/4 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/2 zruinován on a s pravděpodobností 1/2 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 3 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/4 zruinován on a s pravděpodobností 3/4 bude zruinován hráč B.

9.11. Poznámka: Charakteristiky absorpčního řetězce můžeme v MATLABu vypočítat pomocí funkce `absorb.m`:

```
function [Pk,M,B,t]=absorb(P)
% funkce pro výpočet základních charakteristik absorpčního řetězce
% Autor: Stanislav Tvrz
% function [Pk,M,B,t]=absorb(P)
% vstupní parametr: matice přechodu P
% výstupní parametry: Pk ... matice přechodu v kanonickém tvaru
%          M ... fundamentální matice
%          B ... matice přechodu do absorpčních stavů
%          t ... vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí

%vypíše pro kontrolu přechodovou matici P
P
vel=size(P);
[i,j]=find(P==1); % najdu prvky matice P o hodnotě 1
vi=size(i);
st=0; % počet nalezených absorpčních stavů

%převod P na kanonický tvar

for k=1:vi
    if i(k)==j(k)
        st=st+1;

    if st==1 % varianta pro první nalezený absorpční stav
        if (i(k)>1)&(i(k)<vel) % první řádek, pokud odpovídá absorpčnímu stavu se nepřesouvá
            P=[P(i(k),:);P(1:i(k)-1,:);P(i(k)+1:vel,:)]; % přesun k-tého řádku na místo prvního
```



```

P=[P(:,i(k)),P(:,1:i(k)-1),P(:,i(k)+1:vel)]; % přesun k-tého sloupce na místo prvního
elseif (i(k)==vel)&(st<vel) % varianta pro přesun posledního řádku/sloupce
P=[P(i(k),:);P(1:i(k)-1,:)]; % přesun k-tého řádku na místo prvního
P=[P(:,i(k)),P(:,1:i(k)-1)]; % přesun k-tého sloupce na místo prvního
end;
else
if ((i(k))>st+1)&(i(k)<vel) % varianta pro další nalezený absorpční stav
P=[P(1:st-1,:);P(i(k),:);P(st:i(k)-1,:);P(i(k)+1:vel,:)]; %přesun k-tého řádku na místo dalšího absorpčního
stavu
P=[P(:,1:st-1),P(:,i(k)),P(:,st:i(k)-1),P(:,i(k)+1:vel)]; %přesun k-tého sloupce na místo dalšího absorpčního
stavu
elseif (i(k)==vel)&(st<vel) % varianta pro přesun posledního řádku/sloupce
P=[P(1:st-1,:);P(i(k),:);P(st:i(k)-1,:)]; %přesun k-tého řádku na místo dalšího absorpčního stavu
P=[P(:,1:st-1),P(:,i(k)),P(:,st:i(k)-1)]; %přesun k-tého sloupce na místo dalšího absorpčního stavu
end;
end;
end;
end;
end;

```

%Pk = kanonický tvar přechodové matice

Pk=P

% Q = matice přechodových pravděpodobností mezi přechodnými stavy

Q=[P(st+1:vel,st+1:vel)];

% R = matice přechodových pravděpodobností z přechodných do absorpčních stavů

R=[P(st+1:vel,1:st)];

% M = matice středního počtu kroků strávených v j-tém stavu před absorpcí, pokud řetězec vychází ze stavu i

$M = \text{inv}(\text{eye}(\text{vel-st}) - Q);$

% B = matice pravděpodobností, že řetězec bude absorbován j-tým stavem, pokud vychází z i-tého stavu
přechodného

$B = M * R;$

% t = vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí

$t = M * \text{ones}(\text{vel-st}, 1);$

Použijeme-li tuto funkci na řešení příkladu 9.10., dostaneme výsledky:

$P_k =$

1.0000	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0
0.5000	0	0	0.5000	0
0	0	0.5000	0	0.5000
0	0.5000	0	0.5000	0

$M =$

1.5000	1.0000	0.5000
1.0000	2.0000	1.0000
0.5000	1.0000	1.5000

$B =$

0.7500	0.2500
0.5000	0.5000
0.2500	0.7500

$t =$

3.0000
4.0000
3.0000

9.12. Příklad: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do 30 denních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kde

stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti,

stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti,

stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti,

stav 4 splacené pohledávky a

stav 5 nedobytné pohledávky.

Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou:

$p_{12} = 0,77$, $p_{14} = 0,23$, $p_{23} = 0,34$, $p_{24} = 0,66$, $p_{34} = 0,73$ a $p_{35} = 0,27$.

Úkoly:

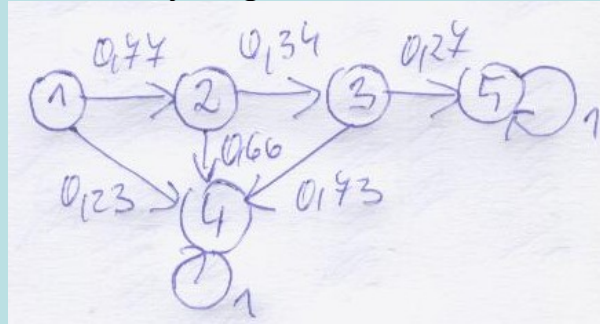
- Sestavte matici přechodu.
- Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.
- Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
- Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.
- Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.
- Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a)

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 & 0,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,73 & 0,27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,23 & 0 & 0 & 0,77 & 0 \\ 0,66 & 0 & 0 & 0 & 0,34 \\ 0,73 & 0,27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ad c) Vypočteme fundamentální matici absorpčního řetězce:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví $1 \times 30 = 30$ dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru $0,77 \times 30 = 23,1$ dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru $0,26 \times 30 = 7,8$ dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) Vypočteme matici přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) Vypočteme vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:

$$t = Me = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,03 \\ 1,34 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpretace:

$2,03 \times 30 = 60,9$ – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

$1,34 \times 30 = 40,2$ – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

$1 \times 30 = 30$ – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Připomínáme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.