10. Markovské řetězce s oceněním přechodů

10.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J, v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

10.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po n krocích

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu **P** a matici ocenění **R**. Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i. Dále označme $q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i. Pak pro $\forall i \in J$ a n = 1, 2, 3, ... platí rekurentní vztah:

$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1)$, přičemž $v_i(0) = 0$.

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.3. Příklad: Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Jednotlivým přechodům jsou přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Pro i = 0, 1 položíme $v_i(0) = 0$. Pro oba stavy vypočtěte střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n = 1, 2,…, 6 období.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1. Přitom

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

$q_0 = \sum_{j=0}^{1} p_{0j} r_{0j} = p_{00} r_{00} + p_{01} r_{01} = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 4 = 7$, $q_1 = \sum_{j=0}^{1} p_{1j} r_{1j} = p_{10} r_{10} + p_{11} r_{11} = 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot (-5) = -1$, tj. $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nyní počítáme $\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{Pv}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{Pv}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$ atd.

Tabulka středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n+1)-v_0(n)$	x	3	2,6	2,56	2,556	2,5556
$v_1(n+1)-v_1(n)$	x	2,2	2,52	2,552	2,5558	2,55492
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n) - v_1(n)$ blíží konstantě $8{,}\overline{8}$. Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o $8{,}\overline{8}$ jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě. Dále můžeme pozorovat, že s rostoucím n se rozdíl $v_i(n+1) - v_i(n)$ blíží konstantě $2{,}\overline{5}$. To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

10.4. Poznámka: Je-li $\{X_n; n \in N_0\}$ homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1,\ldots,m\}$ s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}(v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^{m} a_j q_j = g.$$

Konstanta g se nazývá zisk řetězce. V př. 10.3. $\mathbf{a} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right), \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $g = \frac{4}{9}7 - \frac{5}{9} = 2,\overline{5}$.

10.5. Věta: Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po n krocích pomocí limitní matice přechodu

Nechť **A** je limitní matice přechodu daného markovského řetězce s oceněním přechodů. Pak pro dostatečně velká n platí: $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{Aq} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.6. Příklad: Pro zadání z příkladu 10.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor **v**(n).

Řešení: Použijeme vzorec $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$. Nejprve najdeme limitní matici **A**, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru matice **P**. Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{P}$, $a_1 + a_2 = 1$ získáme vektor $\mathbf{a} = (4/9 \quad 5/9)$,

tudíž $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$.

Dále $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}$, tedy

$$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2{,}\overline{5}n + 4{,}9383 \\ 2{,}\overline{5}n - 3{,}9506 \end{pmatrix}.$$

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

Pro porovnání uvedeme tabulku získanou pomocí rekurentního vzorce:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272

10.7. Poznámka: Vektor středních hodnot celkových výnosů po jednom až n obdobích lze získat pomocí funkce vynos.m:

```
function a = vynos(P,R,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% syntaxe: function a=vynos(P,R,n);
% funkce pocita:
%       vektory strednich hodnot celkovych vynosu po jednom az po n obdobich
%       znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlive stavy
%       v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu, R -  matice vynosu, n - pocet obdobi
disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp('pozn: na prvnim radku hodnoty n')

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
```

```
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);
%graf celkovych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end
```

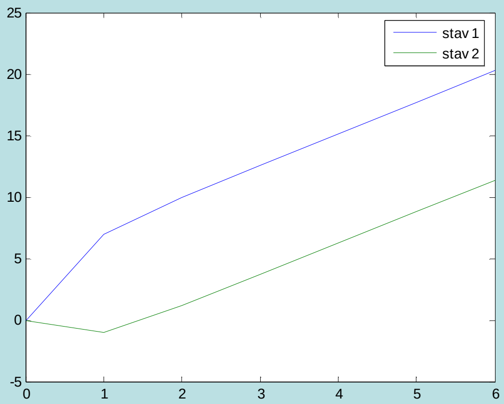
Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.3. pro jedno až 6 období, dostaneme výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	10	12.6	15.16	17.716	20.2716
0	-1	1.2	3.72	6.272	8.8272	11.3827

pozn: na prvnim radku hodnoty n

Graf celkových výnosů:



10.8. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase n+1 oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β $(0 < \beta < 1)$ je tzv. diskontní faktor. Uvedený řetězec se pak nazývá markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů.

Vysvětlení: Diskontní faktor snižuje hodnotu budoucího výnosu. Vystupuje v roli odúročitele, může být 1/(1+i), kde i je úročitel. Může také vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Jeho užití bude účelné tam, kde se může očekávat, že proces skončí, ale neví se, kdy přesně k tomu dojde.

10.9. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, přičemž $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$.

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.10. Příklad: V příkladu 10.3. předpokládejme, že diskontní faktor $\beta = 0{,}5$ značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Pomocí rekurentního vztahu najděte vektor $\mathbf{v}(n)$ středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, …, 6 a stanovte limitní hodnotu tohoto vektoru.

Řešení: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\beta = 0{,}5$, $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$.

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ atd.

Dále uvedeme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6.

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	8,5	9,15	9,47	9,6297	9,7096
$v_1(n)$	-1	0,1	0,73	0,1049	1,2087	1,2886
$v_0(n)- v_1(n)$	8	8,4	8,42	8,3651	8,4210	8,4210

Nyní vypočteme limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů podle vzorce: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{I} - \beta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix},\ |\mathbf{I} - \beta\mathbf{P}| = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{19}{40},$$

$$(\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1} = \frac{40}{19}\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix},\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1} q == \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{186}{19} \\ \frac{26}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}7895 \\ 1{,}3684 \end{pmatrix}$$

Rozdíl složek limitního vektoru: 9,7895 – 1,3684 = 8,4219.

Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o 8,4219 jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

10. 11. Poznámka: Vektor středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až n obdobích a limitní hodnotu tohoto vektoru lze získat pomocí funkce diskont.m:

```
function a=diskont(P,R,beta,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% function a=diskont(P,R,beta,n);
% funkce pocita:
%       vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po jednom az po n obdobich
%       limitni vektor strednich hodnot diskontovanych vynosu
%       znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlive stavy
%       v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu
% R -  matice vynosu
% beta - diskontni faktor
% n - pocet obdobi
%clc;

disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
```

```
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+beta*P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp(['pri hodnote diskontniho faktoru beta = ',num2str(beta)])
disp('pozn: na prvnim radku hodnoty n')
disp(' ')
disp('limitni vektor v(n)')
v_n=inv(eye(vel(1))-beta*P)*q;
disp(num2str(v_n))

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);

%graf diskontovanych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end
```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.10. pro jedno až 6 období, dostaneme tyto výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	8.5	9.15	9.47	9.6297	9.7096
0	-1	0.1	0.73	1.049	1.2087	1.2886

pri hodnote diskontniho faktoru beta = 0.5
pozn: na prvnim radku hodnoty n

limitni vektor v(n)
9.7895
1.3684

Graf diskontovaných výnosů: