

10. Markovské řetězce s oceněním přechodů

10.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J , v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i, j \in J}$, která se nazývá **matice výnosů**. Řetězec $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se pak nazývá **markovský řetězec s oceněním přechodů**.

10.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po n krocích

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu \mathbf{P} a matici ocenění \mathbf{R} . Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i . Dále označme $q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i . Pak pro $\forall i \in J$ a $n = 1, 2, 3, \dots$ platí rekurentní vztah:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1), \text{ přičemž } v_i(0) = 0.$$

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.3. Příklad: Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo

v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Jednotlivým přechodům jsou

přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Pro $i = 0, 1$ položíme

$v_i(0) = 0$. Pro oba stavy vypočtěte střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za $n = 1, 2, \dots, 6$ období.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1. Přitom

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$q_0 = \sum_{i=0}^1 r_{0i} = r_{00} + r_{01} = 10 + 4 = 14, \quad q_1 = \sum_{i=0}^1 r_{1i} = r_{10} + r_{11} = 5 + (-5) = 0, \quad \text{tj. } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nyní počítáme } \mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + P\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,25 \\ 2,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + P\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11,25 \\ 2,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,125 \\ 3,72 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

Tabulka středních hodnot celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots, 6$:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n+1) - v_0(n)$	x	3	2,6	2,56	2,556	2,5556
$v_1(n+1) - v_1(n)$	x	2,2	2,52	2,552	2,5558	2,55492
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n) - v_1(n)$ blíží konstantě $8,8$. Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o $8,8$ jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě. Dále můžeme pozorovat, že s rostoucím n se rozdíl $v_i(n+1) - v_i(n)$ blíží konstantě $2,5$. To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

10.4. Poznámka: Je-li $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{1, \dots, m\}$ s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{1} \mathbf{a}^T = \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_j a_j = \mathbf{1} \mathbf{a}^T.$$

Konstanta g se nazývá **zisk řetězce**. V př. 10.3. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, tedy $g = \frac{4 \cdot 7 + 5 \cdot 1}{9} = 5$.

10.5. Věta: Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po n krocích pomocí limitní matice přechodu

Nechť \mathbf{A} je limitní matice přechodu daného markovského řetězce s oceněním přechodů. Pak pro dostatečně velká n platí: $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.6. Příklad: Pro zadání z příkladu 10.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor $\mathbf{v}(n)$.

Řešení: Použijeme vzorec $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$. Nejprve najdeme limitní matici \mathbf{A} , jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru matice \mathbf{P} . Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{P}$, $a_1 + a_2 = 1$ získáme vektor $\mathbf{a} = (4/9 \ 5/9)$,

$$\text{tudíž } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dále } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 10617 & 0061 \\ 00494 & 10494 \end{pmatrix} \text{ tedy}$$

$$\mathbf{v}(n) \approx (n-1) \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10617 & 0061 \\ 00494 & 10494 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25n + 4938 \\ 25n - 3950 \end{pmatrix}$$

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

Pro porovnání uvedeme tabulku získanou pomocí rekurentního vzorce:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272

10.7. Poznámka: Vektor středních hodnot celkových výnosů po jednom až n obdobích lze získat pomocí funkce vynos.m:

```
function a = vynos(P,R,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% syntaxe: function a=vynos(P,R,n);
% funkce pocita:
%     vektory strednich hodnot celkovych vynosu po jednom az po n obdobich
%     znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlivé stavy
%     v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu, R - matice vynosu, n - pocet obdobi
disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp('pozn: na prvni radku hodnoty n')

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
```

```

legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=['stav ',num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);
%graf celkovych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end

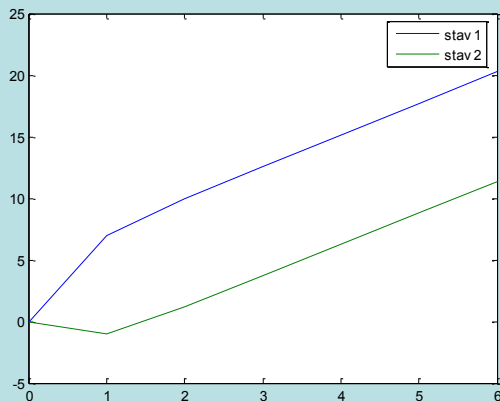
```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.3. pro jedno až 6 období, dostaneme výsledky: sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	10	12.6	15.16	17.716	20.2716
0	-1	1.2	3.72	6.272	8.8272	11.3827

pozn: na prvnim radku hodnoty n

Graf celkových výnosů:



10.8. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β ($0 < \beta < 1$) je tzv. diskontní faktor. Uvedený řetězec se pak nazývá **markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů**.

Vysvětlení: Diskontní faktor snižuje hodnotu budoucího výnosu. Vystupuje v roli odúročitele, může být $1/(1+i)$, kde i je úročitel. Může také vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Jeho užití bude účelné tam, kde se může očekávat, že proces skončí, ale neví se, kdy přesně k tomu dojde.

10.9. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1), \text{ přičemž } \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů je $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.10. Příklad: V příkladu 10.3. předpokládejme, že diskontní faktor $\beta = 0,5$ značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Pomocí rekurentního vztahu najděte vektor $\mathbf{v}(n)$ středních hodnot celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots, 6$ a stanovte limitní hodnotu tohoto vektoru.

Řešení: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\beta = 0,5$, $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1)$.

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ atd.

Dále uvedeme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots, 6$.

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	8,5	9,15	9,47	9,6297	9,7096
$v_1(n)$	-1	0,1	0,73	0,1049	1,2087	1,2886
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,4	8,42	8,3651	8,4210	8,4210

Nyní vypočteme limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů podle vzorce: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$.

$\mathbf{I} - \beta \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} - \beta \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 10 \\ 19 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 19 & 19 \\ 8 & 30 \\ 19 & 19 \end{pmatrix}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 19 & 19 \\ 8 & 30 \\ 19 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 \\ 19 \\ 26 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,789 \\ 1,368 \end{pmatrix}$

Rozdíl složek limitního vektoru: $9,7895 - 1,3684 = 8,4219$.

Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o 8,4219 jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

10. 11. Poznámka: Vektor středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až n obdobích a limitní hodnotu tohoto vektoru lze získat pomocí funkce diskont.m:

```
function a=diskont(P,R,beta,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% function a=diskont(P,R,beta,n);
% funkce pocita:
%     vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po jednom az po n obdobich
%     limitni vektor strednich hodnot diskontovanych vynosu
%     znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlivé stavy
%     v závislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu
% R - matice vynosu
% beta - diskontni faktor
% n - pocet obdobi
%clc;

disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
```

```

q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+beta*P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupceve vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp(['pri hodnote diskontniho faktoru beta = ',num2str(beta)])
disp('pozn: na prvni radku hodnoty n')
disp(' ')
disp('limitni vektor v(n)')
v_n=inv(eye(vel(1))-beta*P)*q;
disp(num2str(v_n))

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);

%graf diskontovanych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end

```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.10. pro jedno až 6 období, dostaneme tyto výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	8.5	9.15	9.47	9.6297	9.7096
0	-1	0.1	0.73	1.049	1.2087	1.2886

pri hodnote diskontniho faktoru beta = 0.5

pozn: na prvni radku hodnoty n

limitni vektor v(n)

9.7895

1.3684

Graf diskontovanych výnosů:

