11. Markovské řetězce se spojitým časem – základní pojmy

11.1. Definice: Definice markovského řetězce se spojitým časem

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $T = \langle 0, \infty)$ je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a J = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že J = {0, 1, 2, ...} nebo J = {0,1, ..., n}). Stochastický proces $\{X_t ; t \in T\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, A), jehož složky X_t nabývají hodnot z množiny stavů J, se nazývá markovský řetězec (se spojitým časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J\ \exists t \in T : P(X_t = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall t_0, t_1, \ldots, t_n \in T\ (t_0 < t_1 < \ldots < t_n) \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P\left(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_{t_0} = j_0\right) = P\left(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1}\right)$

za předpokladu, že $P\left(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_{t_0} = j_0\right) > 0$ (markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých).

Vysvětlení: Markovské řetězce se spojitým časem modelují fyzikální či jiné soustavy, které mohou v libovolném okamžiku náhodně přejít do některého ze svých možných stavů. Markovská vlastnost znamená, že to, do jakého stavu se soustava dostane při následující změně, závisí pouze na tom, v jakém stavu se soustava právě nachází a nezávisí na stavech předchozích. Např. sledujeme-li během pracovní doby provoz automatických strojů v dílně, náhodná veličina X_t, $t \in \langle 0, T)$ je počet strojů, které v okamžiku t nepracují (jsou opravovány nebo čekají na opravu).

11.2. Příklad: Uvažme populaci, jejíž jedinci se mohou množit a zanikat. Pravděpodobnost, že z libovolného jeince vznikne v časovém intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ nový jedinec, je $\lambda h + o(h)$ (symbol o(h) znamená, že $\lim_{h \to \infty} \frac{o(h)}{h} = 0$) a pravděpodobnost, že libovolný jedinec zanikne v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$, je $\mu h + o(h)$. Osudy jedinců jsou navzájem nezávislé. Označme X_t rozsah populace v čase t. Pak stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Nazývá se lineární proces vzniku a zániku (resp. lineární proces množení a úmrtí).

11.3. Označení:

Jev $\{X_t = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku t ve stavu j.

$P(X_t = j) = p_j(t)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku t.

$\mathbf{p}(t) = (\ldots., p_j(t), \ldots)$ – vektor absolutních pravděpodobností.

$P(X_{t+h} = j / X_t = h) = p_{ij}(t, t+h)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku t do stavu j v okamžiku t+h

$$\mathbf{P}(t, t+h) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(t, t+h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ - matice pravděpodobností přechodu mezi okamžiky t, t+h.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j.

$\mathbf{p}(0) = (\ldots., p_j(0), \ldots)$ – vektor počátečních pravděpodobností.

11.4. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec. Pokud dále uvedené podmíněné pravděpodobnosti existují, platí pro

$\forall t, h, g \in T \forall i, j \in J:$

a) $P(X_{t+h} = j / X_t = i) \geq 0$, tj. $p_{ij}(t,t+h) \geq 0$

$$P(X_t = j / X_t = i) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}, \text{ tj. } p_{ij}(t,t) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{pro} i \neq j \end{cases}.$$

b) $\sum_{j \in J} P(X_{t+h} = j / X_t = i) = 1$, tj. $\sum_{j \in J} p_{ij}(t, t+h) = 1.$

(Přechod ze stavu i v okamžiku t do nějakého stavu j v okamžiku t+h je jev s pravděpodobností 1.)

c) $P(X_{t+h+g} = j / X_t = i) = \sum_{k \in J} P(X_{t+h} = k / X_t = i) P(X_{t+h+g} = j / X_{t+h} = k)$, tj. $p_{ij}(t, t+h+g) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+g)$

(Chapmanovy – Kolmogorovovy rovnice)

d) $P(X_{t+h} = j) = \sum_{k \in J} P(X_t = k) P(X_{t+h} = j / X_t = k)$, tj. $p_j(t+h) = \sum_{k \in J} p_k(t) p_{kj}(t, t+h)$

(Zákon evoluce)

Důkaz: Analogicky jako v diskrétním případě.

11.5. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce se spojitým časem v maticovém tvaru

a) **P**(t,t+h) ≥ **0**, kde **0** je nulová matice, **P**(t,t) = **I**, kde **I** je jednotková matice.

b) **P**(t,t+h)**e** = **e**, kde **e** je sloupcový vektor ze samých jedniček.

c) **P**(t,t+h+g) = **P**(t,t+h) **P**(t+h,t+h+g).

d) **p**(t+h) = **p**(t) **P**(t,t+h).

11.6. Definice: Definice HMŘ se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Řekneme, že tento řetězec je homogenní, jestliže platí:
$\forall i, j \in J\ \forall t, h \in T : P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h)$**.**
Vysvětlení: Znamená to, že pravděpodobnosti přechodu $P(X_{t+h} = j / X_t = i)$ – pokud existují – závisí pouze na časovém přírůstku h a nezávisí na časovém okamžiku t.

Matice pravděpodobností přechodu **P**(t,t+h) se pak značí **P**(h) a nazývá se matice přechodu za časový přírůstek h. Pro HMŘ se spojitým časem tedy existuje celý systém matic přechodu $\{P(h), h \in T\}$. Je zvykem definovat **P**(0) = **I**.

11.7. Věta: Vyjádření simultánní pravděpodobnostní funkce pro HMŘ

Pro homogenní markovský řetězec se spojitým časem platí:

$$\forall t, h_1, \ldots, h_n \in T\ \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P(X_t = j_0 \wedge X_{t+h_1} = j_1 \wedge \ldots \wedge X_{t+h_1+\ldots+h_n} = j_n) = p_{j_0}(t) p_{j_0 j_1}(h_1) \ldots p_{j_{n-1} j_n}(h_n)$$

Důkaz: Plyne z věty o násobení pravděpodobností a markovské vlastnosti.

11.8. Věta: CH-K rovnice a zákon evoluce pro HMŘ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak pro $\forall h, g \in T$ platí:

a) **P**(h+g) = **P**(h) **P**(g) (Chapmanova – Kolmogorovova rovnice)

b) **p**(h) = **p**(0) **P**(h) (zákon evoluce)

Důkaz: ad a) plyne z tvrzení (c) věty 11.4

ad b) plyne z tvrzení (d) věty 11.4

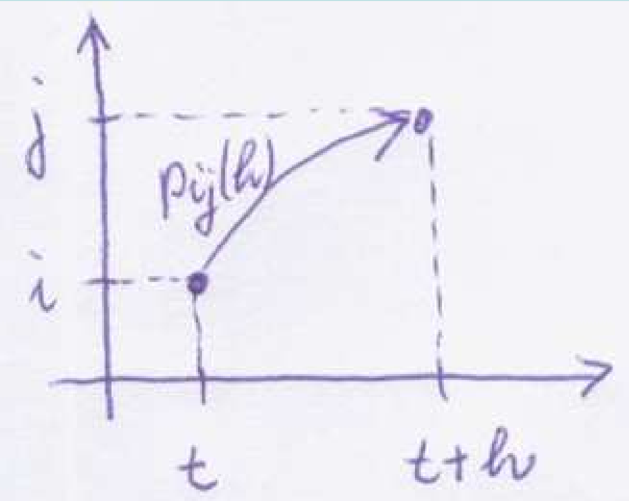
11.9. Věta: Existenční věta

Ke každému stochastickému vektoru **p**(0) a ke každému systému stochastických matic $\{\mathbf{P}(h); h \in T\}$, které splňují CH-K rovnice, existuje HMŘ se spojitým časem, jehož počáteční pravděpodobnosti jsou dány vektorem **p**(0) a systém matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\mathbf{P}(h); h \in T\}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

12. Matice intenzit přechodu homogenního markovského řetězce se spojitým časem

12.1. Motivace: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem. Předpokládejme, že v okamžiku t je řetězec ve stavu i a za časový přírůstek h přejde do stavu j s pravděpodobností $p_{ij}(h)$.



Číslo $\frac{p_{ij}(h)}{h}$ vyjadřuje průměrnou pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za časový přírůstek h.

Označme $p_{ii}(h)$ pravděpodobnost, že za časový přírůstek h řetězec setrvá ve stavu i. Pak $1 - p_{ii}(h)$ je pravděpodobnost, že za časový přírůstek h řetězec přejde do nějakého jiného stavu.

Číslo $\frac{1-p_{ii}(h)}{h}$ vyjadřuje průměrnou pravděpodobnost výstupu řetězce ze stavu i za časový přírůstek h.

Intenzity přechodu resp. výstupu popisují chování těchto průměrných pravděpodobností pro $h \to 0_+$.

12.2. Poznámka: Nadále budeme předpokládat, že

a) $\forall i, j \in J$ existuje $\lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{p_{ij}(h)}{h}$

b) $\forall i \in J$ existuje $\lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{1 - p_{ii}(h)}{h}$

c) $\forall i, j \in J$ existuje $\lim\limits_{h \to 0_+} p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}$

12.3. Definice: Definice intenzit přechodu a výstupu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem se systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak definujeme:

a) $\forall i, j \in J: \; q_{ij} = \lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{p_{ij}(h)}{h}$ - intenzita přechodu ze stavu i do stavu j

b) $\forall i \in J: \; q_i = \lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{1 - p_{ii}(h)}{h}$ - intenzita výstupu ze stavu i.

Vysvětlení: Z definice intenzity přechodu resp. výstupu plyne, že $p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h)$ resp. $p_{ii}(h) = 1 - hq_i + o(h)$. Pro dostatečně malá h tedy dostáváme $p_{ij}(h) \approx hq_{ij}$ resp. $p_{ii}(h) \approx 1 - hq_{ii}$. Číslo q_{ij} vyjadřuje koeficient nárůstu pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(h)$ během krátkého časového intervalu délky h a číslo q_i vyjadřuje koeficient poklesu pravděpodobnosti setrvání $p_{ii}(h)$ během krátkého časového intervalu délky h.

12.4. Věta: Věta o součtu intenzit přechodu

Je-li množina stavů J konečná, pak pro intenzity přechodu platí: $\forall i \in J : \sum_{j \in J} q_{ij} = 0$, kde $q_{ii} = -q_i$.

Důkaz: Vztah $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0$ přepíšeme do tvaru $\sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij} = q_i$.

Počítáme $\sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \in J, j \neq i} \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \sum_{j \in J, j \neq i} p_{ij}(h) = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} [1 - p_{ii}(h)] = q_i$.

12.5. Definice: Definice matice intenzit přechodu

Matice **Q** = $(q_{ij})_{i,j \in J}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá matice intenzit přechodu HMŘ se spojitým časem.

Vysvětlení: Matice **Q** je charakterizována tím, že $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} < 0$ a součet prvků v každém řádku je nulový. Je to kvazistochastická matice.

12.6. Věta: Vztah mezi maticí intenzit přechodu a maticí přechodu

Je-li $\{X_t ; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má konečnou množinu stavů J, maticí intenzit přechodu **Q** a systém matic pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, pak pro $\forall t \in T$ platí: $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$, kde $e^{\mathbf{Q}t}$ je maticová exponenciální funkce definovaná předpisem: $e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

12.6. Poznámka:

Matici intenzit přechodu lze graficky vyjádřit pomocí přechodového diagramu. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde

a) vrcholy jsou stavy

b) hrany odpovídají nenulovým intenzitám přechodu

c) ohodnocení hran je rovno těmto intenzitám. Hrany, které nejsou smyčkami, mají kladné ohodnocení ($q_{ij} > 0$) a smyčky mají záporné ohodnocení ($q_{ii} < 0$).

12.7. Příklad: Doba bezporuchového provozu přístroje je náhodná veličina s rozložením Ex(α). Když dojde k poruše, přístroj začne být okamžitě opravován. Doba opravy je náhodná veličina s rozložením Ex(β). Jakmile je oprava ukončena, přístroj je okamžitě uveden do provozu.
a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ se spojitým časem.
b) Najděte matici intenzit přechodu **Q** a nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

Ad a) Zavedeme náhodnou veličinu $X_t = \begin{cases} 0, \text{pokud v čase t stroj pracuje} \\ 1, \text{pokud v čase t je stroj v opravě} \end{cases}$. Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem s množinou stavů J = {0,1}.

Ad b) Je-li Y spojitá náhodná veličina, pak její pravděpodobnostní chování je popsáno hustotou pravděpodobnosti $\varphi(y)$. Pro distribuční funkci $\Phi(y)$ platí: $\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(t)\,dt$. Dále zavedeme funkci přežití $\Psi(y) = P(Y > y)$ a intenzitu $\lambda(y) = -\dfrac{\Psi'(y)}{\Psi(y)}$.

V našem případě označme Y_1 dobu bezporuchového provozu přístroje, $Y_1 \sim$ Ex(α), tedy $\varphi_1(y_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y_1} \text{ pro } y_1 > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$,

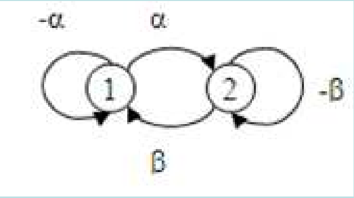
$$\Phi_1(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha y_1} \text{ pro } y_1 > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}, \quad \Psi_1(y_1) = \begin{cases} e^{-\alpha y_1} \text{ pro } y_1 > 0 \\ 1 \text{ jinak} \end{cases}, \quad \lambda_1(y_1) = -\frac{\Psi_1'(y_1)}{\Psi_1(y_1)} = -\frac{-\alpha e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1}} = \alpha.$$

Analogicky označme Y_2 dobu opravy přístroje, $Y_2 \sim$ Ex(β). Stejným způsobem odvodíme, že $\lambda_2(y_2) = \beta$.

Matice intenzit přechodu:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \end{array}.$$

Přechodový diagram:



12.8. Věta: Věta o významu intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má spočetnou množinu stavů J a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

a) Nechť $t \in \langle s, s+h \rangle$, kde $s \geq 0$ a $h > 0$. Pak $P(X_t = i / X_s = i) = e^{-q_i h}$, kde $e^{-q_i h} = 0$, je-li $q_i = \infty$.

b) Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(h) = 1$.

c) Je-li $0 < q_i < \infty$, pak veličina, která udává dobu setrvání řetězce ve stavu i, se řídí rozložením $Ex(q_i)$. Znamená to, že střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu i je $\frac{1}{q_i}$. Dále, pravděpodobnost toho, že první přechod ze stavu i se uskuteční právě do stavu j, $j \neq i$, je $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

12.9. Definice: Definice různých typů stavů

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

a) Jestliže $q_i = 0$, pak řekneme, že stav i je absorpční. (Řetězec, který vstoupí do absorpčního stavu, už v něm zůstane. Střední hodnota doby setrvání v absorpční stavu je nekonečně velká.)

b) Jestliže $0 < q_i < \infty$, pak řekneme, že stav i je stabilní. (Budeme se zabývat výhradně řetězci se stabilními stavy)

c) Jestliže $q_i = \infty$, pak řekneme, že stav i je nestabilní. (Střední hodnota doby setrvání v nestabilním stavu je nulová.)

12.10. Definice: Definice stacionárního vektoru HMŘ se SČ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$. Stochastický vektor **a** takový, že pro $\forall t \in T$ platí **a** = **aP**(t), se nazývá stacionární vektor (stacionární rozložení) daného řetězce.

12.11. Poznámka: Řešení rovnice **a** = **aP**(t) pro $\forall t \in T$ může být obtížné. Proto stacionární vektor počítáme raději pomocí matice intenzit přechodu.

12.12. Věta: Věta o získání stacionárního vektoru pomocí matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

Jestliže existuje $t \in T$ tak, že matice **P**(t) je regulární (tj. všechny její prvky jsou kladné), pak existuje stacionární vektor daného řetězce a je dán vztahem: **aQ** = **0**. Toto řešení je jediné.

Důkaz: Nebudeme provádět.

12.13. Příklad: Pro zadání příkladu 12.7. najděte stacionární vektor.

Řešení: Odvodili jsme, že $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$. Hledáme **a** = ($a_0$, a_1), kde $a_0 + a_1 = 1$, tak, aby **aQ** = **0**.

$$(a_0, a_1)\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} = (0,0), a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1 - a_0.$$

$$-\alpha a_0 + \beta a_1 = 0 \Rightarrow -\alpha a_0 + \beta(1 - a_0) = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, a_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Stacionární vektor má tedy tvar: $\mathbf{a} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)$.

12.14. Definice: Definice ergodického řetězce

Homogenní markovský řetězec se spojitým časem a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ se nazývá ergodický, jestliže pro všechny stochastické vektory **a** odpovídající dimenze existuje $\lim_{t \to \infty} \mathbf{aP}(t)$ a tato limita na nich nezávisí.

12.15. Definice: Definice limitního rozložení a limitní matice přechodu

a) Jestliže existuje $\lim_{t \to \infty} \mathbf{p}(t) = \overline{\mathbf{p}}$, pak $\overline{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení (limitní vektor) daného řetězce.

b) Jestliže existuje $\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(t) = \mathbf{A}$, pak **A** se nazývá limitní matice přechodu daného řetězce. Má-li všechny řádky stejné, nazývá se ergodická limitní matice přechodu.

12.16. Věta: Věta o souvislosti stacionárního a limitního rozložení

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má stacionární rozložení **a**. Pak platí:

a) Jeho limitní rozložení $\overline{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení **a**.

b) Všechny řádky limitní matice **A** jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a**.

12.17. Poznámka: Při hledání stacionárního rozložení lze v MATLABu použít funkci stacionarni_vektor.m:

```
function [a]=stacionarni_vektor(Q)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=stacionarni_vektor(Q)
%vstupni parametr ... kvazistochasticka matice Q
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
n=size(Q,1);
A=[Q';ones(1,n)];
f=[zeros(n,1);1];
a=(A\f)';
```

12.18. Příklad: Nechť HMŘ se SČ má množinu stavů $\{0,1,2\}$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Pomocí MATLABu najděte jeho stacionární rozložení.

Řešení:

Zadáme matici Q=[-1 1 0;2 -3 1;0 1 -1]

Zavoláme funkci stacionarni_vektor:

a=stacionarni_vektor(Q)

Dostaneme výsledek:

```
a =


    0.5000    0.2500    0.2500
```

Znamená to, že po uplynutí dostatečně dlouhé doby polovinu doby stráví řetězec ve stavu 0, čtvrtinu doby ve stavu 1 a rovněž čtvrtinu doby ve stavu 2.

12.19. Příklad: V dílně pracuje N strojů téhož typu. V libovolný okamžik může nastat porucha kteréhokoliv stroje. O stroje se stará r opravářů, r < N. Na opravě stroje se podílí vždy jen jeden z nich. Stroj se v případě poruchy začne okamžitě opravovat, pokud je některý z opravářů volný. Porouchá-li se stroj v okamžiku, kdy jsou všichni opraváři zaměstnáni, musí se čekat, až se některý uvolní. Je známo, že:

stroj, který pracuje v čase t, se během krátkého časového intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$;

stroj, který je v čase t opravován, se během krátkého časového intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ vrátí do provozu s pravděpodobností $\mu h + o(h)$.

Pomocí HMŘ se spojitým časem modelujte počet strojů, které v čase t nepracují. Najděte matici intenzit přechodu a najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.

Řešení:

Nechť X_t je počet strojů, které v čase t nepracují. Pak $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má množinu stavů J = {0, 1, … , N}.

Jeho matici pravděpodobností přechodu určíme takto:

Pravděpodobnost, že se počet strojů, které nepracují, zvětší v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které v čase t pracují, tj. $p_{j,j+1}(h) = (N-j)\lambda h + o(h)$, j = 0, 1, …, N-1.

Pravděpodobnost, že se počet strojů, které nepracují, zmenší v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které jsou v čase t opravovány, tj. $p_{j,j-1}(h) = j\mu h + o(h)$, j = 1,2, …, r resp. $p_{j,j-1}(h) = r\mu h + o(h)$, j = r+1, …, N.

Pravděpodobnost, že se počet nepracujících strojů změní v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ o více než 1, je o(h).

Z těchto pravděpodobností přechodu získáme intenzity přechodu podle vzorce $q_{ij} = \lim\limits_{h\to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$.

$$q_{j,j+1} = \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{j,j+1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{(N-j)\lambda h + o(h)}{h} = (N-j)\lambda \text{, j = 0, 1, …, N-1}$$

$$q_{j,j-1} = \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{j\mu h + o(h)}{h} = j\mu \text{, j = 1, 2, …, r resp. } q_{j,j-1} = \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{r\mu h + o(h)}{h} = r\mu \text{, j = r+1, …, N}$$

Intenzity setrvání ve stavech j = 0, 1, …, N můžeme určit z podmínky, že **Q** je kvazistochastická matice.

Sestavíme tedy matici intenzit přechodu:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -N\lambda & N\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu & -[(N-1)\lambda+\mu] & (N-1)\lambda & \ldots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -[(N-2)\lambda+2\mu] & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -[(N-r)\lambda+r\mu] & (N-r)\lambda & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r\mu & -[(N-r-1)\lambda+r\mu] & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -r\mu \end{pmatrix}$$

Stacionární rozložení získáme řešením systému rovnic : **aQ** = **0** s podmínkou $\sum_{j=0}^{N} a_j = 1$:

$$-N\lambda a_0 + \mu a_1 = 0$$
$$(N-j+1)\lambda a_{j-1} - [(N-j)\lambda + j\mu]a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0,\ j = 1, \ldots, r\text{-}1$$
$$(N-j+1)\lambda a_{j-1} - [(N-j)\lambda + r\mu]a_j + r\mu a_{j+1} = 0,\ j = r, \ldots, N\text{-}1$$
$$\lambda a_{N-1} + r\mu a_N = 0$$

Řešení obdržíme ve tvaru:

$$a_j = \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0,\ j = 1, \ldots, r\text{-}1$$

$$a_j = \frac{N(N-1)\ldots(N-j+1)}{r!r^{j-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0,\ j = r, \ldots, N$$

Přitom $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{N} a_j$.

12.20. Příklad: Uvažme systém, v němž je v provozu velké množství předmětů téže funkce, např. talíře v jídelně. Předpokládáme, že předměty pocházejí od tří různých výrobců (říkáme, že jsou tří různých typů) a že doby životnosti předmětů od různých výrobců jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením Ex(λ_i), i = 1, 2, 3. Provádíme cyklickou záměnu typů podle schématu $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Zvolíme jedno místo v provozu a zavedeme HMŘ $\{X_t; t \in T\}$ se spojitým časem, kde $X_t = j$, když v okamžiku t je na tomto místě zařazen předmět typu j, j = 1, 2, 3.
Najděte matici intenzit přechodu a stanovte stacionární rozložení.

Řešení: Označme Y_j dobu životnosti předmětu j-tého typu, $Y_j \sim Ex(\lambda_j)$, j = 1, 2, 3. V příkladu 12.7. bylo ukázáno, že intenzita poruchy je λ_j, tedy

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Stacionární rozložení získáme řešením systému rovnic : **aQ** = **0** s podmínkou $\sum_{j=1}^{3} a_j = 1$:

$$-\lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3 = 0$$
$$\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 = 0$$
$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = 0$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Řešením tohoto systému obdržíme:

$$a_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3},\ a_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3},\ a_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}.$$