13. Laplaceova transformace a její užití při řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a evolučních diferenciálních rovnic

13.1. Motivace: Pro HMŘ se spojitým časem lze pravděpodobnosti přechodu vyjádřit jako řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a absolutní pravděpodobnosti lze vyjádřit jako řešení systému evolučních diferenciálních rovnic. V obou těchto případech vystupují v uvedených rovnicích intenzity přechodu a jedná se o systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Takovéto systémy můžeme řešit pomocí různých integrálních transformací, z nichž nejrozšířenější je Laplaceova transformace. Laplaceova transformace převádí soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce na soustavu algebraických rovnic pro obrazy těchto funkcí. Tuto soustavu vyřešíme a pomocí operátorového slovníku najdeme k obrazu řešení jeho vzor.

13.2. Definice: Definice Laplaceovy transformace

Nechť f(t) je funkce splňující podmínky:

a) f(t) je spojitá pro $t > 0$,

b) $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$,

c) f(t) je exponenciálního řádu, tj. existují konstanty $M > 0$, $\alpha \in R$ tak, že $\left| f(t) \leq Me^{-\alpha t} \right|$.

Pak funkce $F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$ se nazývá Laplaceova transformace funkce f(t). Funkce f(t) se nazývá vzor a F(z) obraz.

(Obecně je z komplexní proměnná, pro naše účely však postačí $z \geq 0$.)

13.3. Označení:

Laplaceovu transformaci (dále LT) značíme L(f(t)) = F(z) a zpětnou (inverzní) transformaci značíme $L^{-1}(F(z)) = f(t)$.

13.4. Věta: Vztah mezi vzorem a obrazem

Mezi původní funkcí f(t) a její LT F(z) existuje vzájemně jednoznačný vztah.

13.5. Příklad: Najděte LT funkce $f(t) = e^{at}$.

Řešení:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{at} e^{-zt} dt = \int_0^\infty e^{-t(z-a)} dt = -\frac{1}{z-a}\left[e^{-t(z-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{z-a}$$

13.6. Věta: Linearita LT

LT i zpětná LT je lineární je lineární, tj. pro libovolné konstanty $c_1, \ldots, c_n \in R$, aspoň jedna konstanta je nenulová,

platí: $L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(f_i(t))$ a $L^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(z)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L^{-1}(F_i(z))$

13.7. Věta: LT derivace funkce

Pro LT derivace platí: L(f'(t)) = zF(z) – f(0).

13.8. Věta: LT n-té derivace funkce

Pro LT n-té derivace platí: $L(f^{(n)}(t)) = z^n F(z) – z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

13.9. Poznámka: Uvedeme stručný operátorový slovník.

Vzor f(t)	Obraz F(z)
1	$1/z$
t	$1/z^2$
e^{at}	$1/(z-a)$
$t\, e^{at}$	$1/(z-a)^2$
$A\, e^{-at}$	$A/(z+a)$
$t^k\, e^{-at}$	$k!/(z+a)^{k+1}$, k = 0, 1, 2, …

13.10. Příklad: Užitím LT vyřešte diferenciální rovnici y’(t) + y(t) = e^{-2t} s počáteční podmínkou y(0) = 0.

Řešení: $zY(z) - y(0) + Y(z) = \frac{1}{z+2} \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}$

$1 = A(z+2) + B(z+1)$

$2A + B = 1 \Rightarrow 2A - A = 1 \Rightarrow A = 1$

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = -1$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{-1}{z+2}\right) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Zkouška: $y'(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$

$-e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t} = e^{-2t}$ - splněno

Počáteční podmínka: y(0) = 1 – 1 = 0 – splněno

13.11. Příklad: Užitím LT najděte řešení systému lineárních diferenciálních rovnic

$$2y_1'(t) - y_2'(t) + y_2(t) = 0$$
$$y_1(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = 1$$

s počátečními podmínkami $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

Řešení:

$$2[zY_1(z) - y_1(0)] - [zY_2(z) - y_2(0)] + Y_2(z) = 0 \Rightarrow 2zY_1(z) + (1-z)Y_2(z) = 0$$

$$Y_1(z) - 3[zY_{21}(z) - y_2(0)] + 2Y_2(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow Y_1(z) + (2-3z)Y_2(z) = \frac{1}{z}$$

Řešením systému těchto dvou rovnic získáme $Y_2(z) = \dfrac{-2}{z-\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{z-\frac{1}{3}}$, tedy $y_2(t) = -2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}}$.

Z 2. rovnice plyne, že $y_1(t) = 1 + 3y_2'(t) - 2y_2(t) = 1 + 3\left(-e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}\right) + 4e^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{3}} = 1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}}$.

Celkem: $y_1(t) = 1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}}$, $y_2(t) = -2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}}$.

Zkouška: $y_1'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}, y_2'(t) = -e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}$

1. rovnice: $e^{\frac{t}{2}} - \frac{4}{3}e^{\frac{t}{3}} + e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}} - 2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}} = 0$ - splněno, 2. rovnice: $1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}} + 3e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}} - 4e^{\frac{t}{2}} + 4e^{\frac{t}{3}} = 0$ - splněno

Počáteční podmínky: $y_1(0) = 1 + 1 - 2 = 0, y_2(0) = -2 + 2 = 0$ - splněno.

13.12. Věta: Kolmogorovovy systémy a systém evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(t); t \in T\}$, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) a matici intenzit přechodu **Q**. Pak platí:

a) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou **P**(0) = **I** (Kolmogorovův systém prospektivních diferenciálních rovnic)

b) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou **P**(0) = **I** (Kolmogorovův systém retrospektivních diferenciálních rovnic)

c) $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou **p**(0) = daný stochastický vektor (systém evolučních diferenciálních rovnic).

13.13. Věta: Věta o řešení Kolmogorovových systémů a systému evolučních diferenciálních rovnic

Nechť **Q** je kvazistochastická matice řádu n. Pak platí:

a) Existuje jediné řešení systému prospektivních a retrospektivních Kolomogorovových diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou **P**(0) = **I**. Toto řešení představuje systém matic přechodu HMŘ se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Existuje jediné řešení systému evolučních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou **p**(0) = daný stochastický vektor. Toto řešení představuje systém vektorů absolutních pravděpodobností HMŘ se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

13.14. Příklad: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{1,2\}$, matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) Najděte vektor stacionárních pravděpodobností.

b) Najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

Ad a) Hledáme vektor **a** tak, aby **aQ** = **0**, $a_1 + a_2 = 1$.

$$(a_1, a_2)\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0,0), a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 - a_1$$

$$-2a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow 2a_1 - 1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$, tedy $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ad b) Řešíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$(p_1'(t), p_2'(t)) = (p_1(t), p_2(t))\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, p_1(t) + p_2(t) = 1 \Rightarrow p_2(t) = 1 - p_1(t)$$

$$p_1'(t) = -2p_1(t) + p_2(t) \Rightarrow p_1'(t) = -2p_1(t) + 1 - p_1(t), p_1(0) = \frac{1}{2}.$$

Laplaceův obraz: $zP_1(z) - p_1(0) = -2P_1(z) + \frac{1}{z} - P_1(z) \Rightarrow P_1(z)(z+3) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \frac{z+2}{z} \Rightarrow P_1(z) = \frac{z+2}{z(z+3)} = \frac{\frac{2}{3}}{z} + \frac{\frac{1}{6}}{z+3}$

$$p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{z} + \frac{\frac{1}{6}}{z+3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$, $p_2(t) = 1 - p_1(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t}$. Zkouška vyjde.