13. Laplaceova transformace a její užití při řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a evolučních diferenciálních rovnic

13.1. Motivace: Pro HMŘ se spojitým časem lze pravděpodobnosti přechodu vyjádřit jako řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a absolutní pravděpodobnosti lze vyjádřit jako řešení systému evolučních diferenciálních rovnic. V obou těchto případech vystupují v uvedených rovnicích intenzity přechodu a jedná se o systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Takovéto systémy můžeme řešit pomocí různých integrálních transformací, z nichž nejrozšířenější je Laplaceova transformace. Laplaceova transformace převádí soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce na soustavu algebraických rovnic pro obrazy těchto funkcí. Tuto soustavu vyřešíme a pomocí operátorového slovníku najdeme k obrazu řešení jeho vzor.

13.2. Definice: Definice Laplaceovy transformace

Nechť f(t) je funkce splňující podmínky:

a) f(t) je spojitá pro $t > 0$,

b) $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$,

c) f(t) je exponenciálního řádu, tj. existují konstanty $M > 0$, α tak, že $|f(t)| < M e^{\alpha t}$.

Pak funkce $F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$ se nazývá Laplaceova transformace funkce f(t). Funkce f(t) se nazývá vzor a F(z) obraz.

(Obecně je z komplexní proměnná, pro naše účely však postačí $z \geq 0$.)

13.3. Označení:

Laplaceovu transformaci (dále LT) značíme L(f(t)) = F(z) a zpětnou (inverzní) transformaci značíme L^{-1}(F(z)) = f(t).

13.4. Věta: Vztah mezi vzorem a obrazem

Mezi původní funkcí f(t) a její LT F(z) existuje vzájemně jednoznačný vztah.

13.5. Příklad: Najděte LT funkce f(t) = e^{at}.

Řešení:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{at} e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(z-a)t}\,dt = \frac{1}{-(z-a)}\left[e^{-(z-a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{z-a}$$

13.6. Věta: Linearita LT

LT i zpětná LT je lineární je lineární, tj. pro libovolné konstanty $c_1, \dots, c_n \in$, aspoň jedna konstanta je nenulová,

platí: $L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(f_i(t))$ a $L^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(z)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L^{-1}(F_i(z))$

13.7. Věta: LT derivace funkce

Pro LT derivace platí: L(f'(t)) = zF(z) – f(0).

13.8. Věta: LT n-té derivace funkce

Pro LT n-té derivace platí: $L(f^{(n)}(t)) = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

13.9. Poznámka: Uvedeme stručný operátorový slovník.

Vzor f(t)	Obraz F(z)
1	$1/z$
t	$1/z^2$
e^{at}	$1/(z-a)$
$t\ e^{at}$	$1/(z-a)^2$
$A\ e^{-at}$	$A/(z+a)$
$t^k\ e^{-at}$	$k!/(z+a)^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

13.10. Příklad: Užitím LT vyřešte diferenciální rovnici $y'(t) + y(t) = e^{-2t}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.

Řešení:

Zkouška:

- splněno

Počáteční podmínka: $y(0) = 1 - 1 = 0$ – splněno

13.11. Příklad: Užitím LT najděte řešení systému lineárních diferenciálních rovnic

s počátečními podmínkami $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

Řešení:

Řešením systému těchto dvou rovnic získáme Y_2, tedy y_2.

Z 2. rovnice plyne, že y_1.

Celkem: y_1, y_2.

Zkouška: y_1', y_2'

1. rovnice: - splněno, 2. rovnice: - splněno

Počáteční podmínky: $y_1(0)$, $y_2(0)$ - splněno.

13.12. Věta: Kolmogorovovy systémy a systém evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\{X(t); t \in \}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in \}$, systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(t); t \in \}$, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) a matici intenzit přechodu **Q**. Pak platí:

a) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou **P**(0) = **I** (Kolmogorovův systém prospektivních diferenciálních rovnic)

b) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou **P**(0) = **I** (Kolmogorovův systém retrospektivních diferenciálních rovnic)

c) $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou **p**(0) = daný stochastický vektor (systém evolučních diferenciálních rovnic).

13.13. Věta: Věta o řešení Kolmogorovových systémů a systému evolučních diferenciálních rovnic

Nechť **Q** je kvazistochastická matice řádu n. Pak platí:

a) Existuje jediné řešení systému prospektivních a retrospektivních Kolomogorovových diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou **P**(0) = **I**. Toto řešení představuje systém matic přechodu HMŘ se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Existuje jediné řešení systému evolučních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou **p**(0) = daný stochastický vektor. Toto řešení představuje systém vektorů absolutních pravděpodobností HMŘ se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

13.14. Příklad: Nechť $\{X_t, t \in \ldots\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{1, 2\}$, matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) Najděte vektor stacionárních pravděpodobností.

b) Najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

Ad a) Hledáme vektor **a** tak, aby **aQ** = **0**, $a_1 + a_2 = 1$.

$$(a_1, a_2)\begin{pmatrix} - & 2 \\ \ldots & - \end{pmatrix} = (0, \ldots), a_1 + \ldots = \ldots \Rightarrow \ldots - \ldots$$

$$- \ldots + \ldots = \ldots \Rightarrow \ldots - \ldots = \ldots \Rightarrow \ldots a_2 = \ldots - \ldots = \ldots$$, tedy $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ad b) Řešíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$(p'_1(t), p'_2(t)) = (\ldots(t), p_2(t))\begin{pmatrix} - & 2 \\ \ldots & - \end{pmatrix} \ldots(t) + \ldots(t) = \ldots \Rightarrow \ldots = - \ldots(t)$$

$$p'(t) = \ldots(t) + \ldots(t) \Rightarrow \ldots = \ldots(t) + \ldots - \ldots(t), p(0) = \ldots$$

Laplaceův obraz: $zP(z) - \ldots(0) = \ldots(z) + \ldots - \ldots(z) \Rightarrow \ldots(z) + \ldots = \ldots + \ldots = \ldots \Rightarrow \ldots = \ldots = \ldots + \frac{1}{6} \ldots$

$$p(t) = \ldots\left(\ldots + \frac{1}{6 \ldots + \ldots}\right) \ldots + \ldots, \quad p_2(t) = \ldots - \ldots(t) = \ldots - \ldots$$ Zkouška vyjde.