

Příklady z genetiky na absorpční řetězce

Příklad 1.: Máme populaci diploidní cizosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a , A . Z populace náhodně vybereme jedince, sprášíme ho homozygotním jedincem typu AA a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jejich potomky.

Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$, kde stav $0 = aa$, stav $1 = Aa = aA$, stav $2 = AA$.

Úkoly:

- Najděte matici přechodu \mathbf{P} .
- Ukažte, že řetězec je absorpční.
- Najděte fundamentální matici \mathbf{M} a interpretujte její prvky.
- Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů \mathbf{B} a interpretujte její prvky.
- Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

aa, AA \rightarrow aA, aA, aA, aA

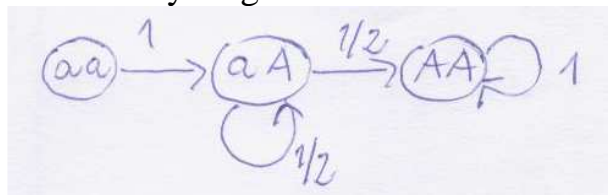
aA, AA \rightarrow aA, aA, AA, AA

AA, AA \rightarrow AA, AA, AA, AA

ad a)

aa aA AA Přechodový diagram:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} aa & aA & AA \end{matrix} \\ \begin{matrix} aa \\ aA \\ AA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



ad b) Řetězec má jediný trvalý stav AA, který je absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} AA & aa & aA \end{matrix} \\ \begin{matrix} AA \\ aa \\ aA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}. \text{ Vidíme, že } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \text{ Dále}$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} aa & aA \end{matrix} \\ \begin{matrix} aa \\ aA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa (tj. od recesivního homozygota) v něm v průměru setrvá 1 krok než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aa setrvá ve stavu aA v průměru 2 kroky než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvá 2 kroky než bude absorbován.

$$\text{ad d) } \mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{aa} \\ \text{aA} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Ať řetězec vychází ze stavu aa nebo aA, tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu AA.

$$\text{ad e) } \mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{matrix} \text{aa} \\ \text{aA} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa bude v průměru za 3 kroky absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.

Příklad 2.: Máme populaci diploidní samosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a, A . Z populace náhodně vybereme jedince, samosprašíme ho a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jeho potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$, kde stav $0 = aa$, stav $1 = Aa = aA$, stav $2 = AA$.

a) Najděte matici přechodu \mathbf{P} .

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Najděte fundamentální matici \mathbf{M} a interpretujte její prvky.

d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů \mathbf{B} a interpretujte její prvky.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

$$\text{ad a) } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ad b) Řetězec má dva trvalé stavy aa a AA , oba jsou absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}. \text{ Vidíme, že } R = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, Q = (1/2). \text{ Dále } M = (I - Q)^{-1} = (2).$$

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvává 2 kroky než bude absorbován.

ad d) $B = MR = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA bude s pravděpodobností $1/2$ absorbován ve stavu aa a s pravděpodobností $1/2$ bude absorbován ve stavu AA .

ad e) $t = Me = (2)$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.