Zadání příkladů na 1. cvičení

Příklad 1.: Na přímce jsou vyznačeny body –1, 0, 1. V bodě 0 se nachází kulička. Náhodně házíme mincí. Jestliže padne líc, posuneme kuličku do bodu 1, jestliže padne rub, posuneme ji do bodu –1. Je-li kulička v bodě 1 a padne-li líc, ponecháme ji v bodě 1, padne-li rub, posuneme ji do bodu 0. Je-li kulička v bodě –1 a padne-li rub, ponecháme ji v bodě –1, padne-li líc, posuneme ji do bodu 0.
Modelujte tuto situaci vhodným SP.
Pro posloupnost 10 hodů mincí {L, L, L, R, R, L, R, L, R, R} graficky znázorněte odpovídající realizace SP.
Příklad 2.: Nechť náhodná veličina X ~ Ex(λ), tj.
hustota: $\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$, distribuční funkce: $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$, $t > 0$.
a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.
b) K distribuční funkci $\Phi_t(x)$ najděte hustotu $\varphi_t(x)$.
Příklad 3.: Náhodná veličina X má distribuční funkci Φ(x). Nechť c, t ∈ R, t > 0. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX + c$.
a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.
b) Najděte dvourozměrnou distribuční funkci $\Phi_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$.
Příklad 4.: Náhodná veličina X má distribuční funkci Φ(x). Nechť t > 0. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX^2$. Určete jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.
Příklad 5.: Nechť $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou distribuční funkci Φ(x). Nechť $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$. Určete pravděpodobnostní rozložení tohoto SP.
Příklad 6.: Nechť náhodná veličina X ~ Ex(λ), tj. E(X) = 1/ λ, D(X) = 1/ λ^2. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$. Najděte střední hodnotu, rozptyl, autokovarianční a autokorelační funkci tohoto SP.
Příklad 7.: Nechť Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny, které jsou nekorelované. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = t + Y.\cos \omega t + Z.\sin \omega t$, ω > 0 konstanta. Zjistěte, zda daný SP je slabě stacionární.
Příklad 8.: Uvažme SP z příkladu 7. Zavedeme standardizovaný SP $\{U_t; t \in T\}$, kde $U_t = \frac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$. Zjistěte, zda tento standardizovaný SP je slabě stacionární.
Příklad 9.: Nechť Y, Z jsou náhodné veličiny se středními hodnotami E(Y) = μ_1, E(Z) = μ_2 a rozptyly D(Y) = σ_1^2, D(Z) = σ_2^2. Jejich koeficient korelace je R(Y,Z) = 0,7. . Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = 2tY + Z$. Najděte střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci tohoto SP.
Příklad 10.: Nechť $\gamma_X(t_1,t_2)$ je autokovarianční funkce SP $\{X_t; t \in T\}$. Nechť f(t), g(t) jsou reálné funkce definované na T. Zavedeme SP $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = f(t)X_t + g(t)$. Najděte autokovarianční funkci tohoto SP.
Příklad 11.: Nechť SP $\{X_t; t \in T\}$ má střední hodnotu $\mu(t) =$ [illegible] a autokovarianční funkci $\gamma(t_1,t_2) =$ [illegible]. Zavedeme SP $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = tX_t + t^2 + 1$. Najděte jeho střední hodnotu a autokovarianční funkci.