

Zadání příkladů na 8. cvičení

Příklad 1.: Částice se pohybuje po třech drahách 1, 2, 3, které jsou umístěny mezi odrážejícími stěnami. Na počátku sledování je částice na 2. dráze. Částice může změnit svoji dráhu v libovolném okamžiku. Je známo, že během krátkého časového intervalu o délce h (přitom $0 < h < 0,5$) částice může buď zůstat na dráze, na níž se právě nachází nebo může přeskocit na sousední dráhu s pravděpodobností $2h$. Pravděpodobnosti přeskoků na další dráhy jsou zanedbatelně malé.

- Popište polohu částice na jednotlivých drahách pomocí HMŘ se spojitým časem.
- Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Výsledek: $\mathbf{a} = (1/3 \ 1/3 \ 1/3)$

Příklad 2.: Uvažme provoz malé půjčovny aut, která má 4 auta. Doba mezi dvěma požadavky na zapůjčení auta je náhodná veličina, která má exponenciální rozložení se střední hodnotou polovina dne a doba výpůjčky je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou třetina dne.

- Popište počet vypůjčených aut pomocí HMŘ se spojitým časem.
- Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Nápověda: Pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se během intervalu $(t, t+h)$ zvětší o 1, je stále λh ($\lambda = 2$) a pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se v intervalu $(t, t+h)$ zmenší o 1, je úměrná počtu zapůjčených aut s koeficientem úměrnosti μ ($\mu = 3$).

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,5137 \ 0,3425 \ 0,1142 \ 0,0254 \ 0,0042)$

Příklad 3.: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem a množinou stavů

$J = \{0, 1, \dots, n, \dots, m\}$, kde pro čísla m a n platí $1 \leq n \leq m$. Intenzity přechodu jsou dány vztahy:

$$q_{j,j-1} = \begin{cases} j\mu & \text{pro } 0 < j < n \\ n\mu & \text{pro } n \leq j \leq m \end{cases}, \quad q_{j,j+1} = (m-j)\lambda \quad \text{pro } 0 \leq j \leq m.$$

Vypočtete stacionární rozložení tohoto řetězce pro $n = 2$, $m = 5$, $\lambda = 4$, $\mu = 12$.

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,2198 \ 0,3664 \ 0,2442 \ 0,1221 \ 0,0407 \ 0,0068)$