Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Příklad 1 (lineární homogenní soustavy 1. řádu). Řešte úlohy

(a) $\begin{cases} y' = -2, \\ z' = z, \end{cases}$ $\qquad [y = C_1 - 2x,\ z = C_2\,\mathrm{e}^x]$

(b) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2y, \end{cases}$ $\qquad [x = \frac{C_1}{2}\,\mathrm{e}^{2t} + C_2,\ y = C_1\,\mathrm{e}^{2t}]$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 5x_2, & x_2(0) = -1, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{5t} \\ -\mathrm{e}^{5t} \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{C_2}{3}\,\mathrm{e}^{5t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{5t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{5t}]$

(d) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 2x_2, & x_2(0) = 1, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + t\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}]$

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x}, \\ z' = y + z, \end{cases}$ $\qquad [y = C_1 x,\ z = C_2\,\mathrm{e}^x - C_1(x+1)]$

(f) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^t + C_2 t\,\mathrm{e}^t \\ (C_1 - C_2)\,\mathrm{e}^t + C_2 t\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t]$

(g) $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + z, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ \frac{1}{2}C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}]$

(h) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = 2x_1 + x_2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{3t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}]$

(i) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 2x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 4x_1 + 4x_2, & x_2(0) = 2, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} 4 - 3\,\mathrm{e}^{2t} \\ -4 + 6\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1 - C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} - C_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}]$

(j) $\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2, & x_2(0) = -1, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \sin t \\ -e^t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\,\mathrm{e}^t \\ (C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix}]$

(k) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 2, \\ x_2' = -4x_1 - x_2, & x_2(0) = 3, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\,\mathrm{e}^t + 7\,\mathrm{e}^{3t} \\ 10\,\mathrm{e}^t - 7\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}]$

(l) $\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = -x_1 + 2x_2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $\qquad [\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ C_2 \cos t - C_1 \sin t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}]$

(m) $\begin{cases} x' = -9y, \\ y' = x, \end{cases}$ $[x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t,\ y = C_2 \cos 3t + C_1 \sin 3t]$

(n) $\begin{cases} x' = -3x - 4y, & x(0) = 1, \\ y' = -2x - 5y, & y(0) = 4, \end{cases}$ $[x = -2\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{-7t},\ y = \mathrm{e}^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{-7t}]$

(o) $\begin{cases} x' = x + 5y, & x(0) = -2, \\ y' = -x - 3y, & y(0) = 1, \end{cases}$ $[x = (\sin t - 2\cos t)\,\mathrm{e}^{-t},\ y = \mathrm{e}^{-t} \cos t]$

(p) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2y, \\ z' = -z, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3\,\mathrm{e}^{t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \right]$

(q) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + z, \\ z' = 2z, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}\left(C_3 + C_2 t + \frac{C_1}{2} t^2\right) \\ \mathrm{e}^{2t}(C_2 + C_1 t) \\ C_1\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \right]$

(r) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_2 + 4y_3, \\ y_3' = y_1 - 4y_3. \end{cases}$ $\left[C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{-3t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right]$

Příklad 2 (lineární homogenní soustavy 2. řádu).

(a) $\begin{cases} x'' + y' + x = 0, \\ x' + y'' = 0, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 t^2 \\ -(C_1 + 2C_3)t - \frac{C_2}{2} t^2 - C_3 \frac{t^3}{3} + C_4 \end{bmatrix} \right]$

(b) $\begin{cases} x'' = y, \\ y'' = x, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t \\ C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t \end{bmatrix} \right]$

(c) $\begin{cases} x_1'' = x_1 - 4x_2, \\ x_2'' = -x_1 + x_2. \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} \\ \frac{C_1}{2} \cos t + \frac{C_2}{2} \sin t - \frac{C_3}{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}} - \frac{C_4}{2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right]$

Příklad 3 (lineární nehomogenní soustavy). Řešte úlohy

(a) $\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = -3x_1 - 4x_2 + t, & x_2(0) = 2, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \frac{14}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + \right.$ $\left. + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right]$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 2x_1 + \mathrm{e}^{t}, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} - t\,\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix} \right]$

(c) $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} + t - 1 \\ y = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} - t + 1 \end{bmatrix} \right]$

(d) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, \\ x' + y = \cos t, \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \cos t \end{bmatrix} \right]$

(e) $\begin{cases} y' = 4y - z - 5x + 1, \\ z' = y + x + 2z - 1. \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3x}(C_1 + C_2 x) + x \\ z = \mathrm{e}^{3x}(C_1 + C_2 x) - C_2\,\mathrm{e}^{3x} - x \end{bmatrix} \right]$