Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 1 (přímá integrace). Řešte počáteční úlohy

(a) $x'(t) = t^3, \quad x(0) = 0,$ $\qquad [x(t) = \frac{t^4}{4}]$

(b) $x'(t) = \cos^2 x, \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8},$ $\qquad [x(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) - \frac{1}{4}]$

(c) $x'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}, \quad x(0) = 2.$ $\qquad [x(t) = 2 + \operatorname{arctg} x]$

Příklad 2 (separace proměnných). Řešte počáteční úlohy

(a) $x = x' \cos^2 t \ln x, \quad x(\pi) = 1,$ $\qquad [\ln^2 |x(t)| - 2 \operatorname{tg} t = 0]$

(b) $x + x' \operatorname{cotg} t = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1,$ $\qquad [x(t) = -2\cos t]$

(c) $x^2 + t^2 x' = 0, \quad x(-1) = 1,$ $\qquad [x(t) = -t]$

(d) $yy' + x = 1, \quad y(1) = 1,$ $\qquad [(x-1)^2 + y^2(x) = 1]$

(e) $(y + xy) + (x - xy)y' = 0, \quad y(1) = 1,$ $\qquad [x - y(x) + \ln |xy(x)| = 0]$

(f) $2(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0,$ $\qquad [2\,\mathrm{e}^{y^2(x)} + \mathrm{e}^x + 1 = 0]$

(g) $y' = 2\sqrt{y} \ln x, \quad y(\mathrm{e}) = 1.$ $\qquad [y(x) = (x(\ln x - 1) + 1)^2]$

Příklad 3 (separace proměnných). Stanovte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $x' = -\dfrac{t - x}{t + x},$ $\qquad [\ln(t^2 + x^2(t)) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{t} = C$ implicitně$]$

(b) $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2},$ $\qquad [\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} = Cy$ implicitně$]$

(c) $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2},$ $\qquad [y(x) = x \sin \ln |Cx|,\ C \neq 0,\ y(x) = x,\ y = -x]$

(d) $(x + 2y) - xy' = 0.$ $\qquad [y(x) = Cx^2 - x]$

Příklad 4. Řešte počáteční úlohy

(a) $tx' = \sqrt{t^2 - x^2} + x, \quad x(1) = 1,$ $\qquad [x(t) = t \sin\left(\ln t + \frac{\pi}{2}\right)]$

(b) $y' = \dfrac{x + y}{y - x}, \quad y(1) = 0,$ $\qquad [y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 1}]$

Příklad 5 (lineární homogenní diferenciální rovnice 1. řádu). Řešte počáteční úlohu

$$y' + \frac{2}{x} y = 0, \quad y(1) = 2. \qquad [y(x) = \tfrac{2}{x^2}]$$

Příklad 6 (variace konstanty). Řešte počáteční úlohy

(a) $x' - x \operatorname{cotg} t = \sin t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$ $\qquad [x(t) = \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t]$

(b) $x' - x \operatorname{cotg} t = \sin t, \quad x(\pi) = 1,$ $\qquad$ [nemá řešení; proč?]

(c) $x' - \dfrac{3x}{t} = \dfrac{1 + \ln t}{t}, \quad x(1) = -\dfrac{1}{3},$ $\qquad [x(t) = \frac{t^3 - 4}{9} - \frac{1}{3} \ln |t|]$

(d) $xy' - (3y + 1 + \ln x) = 0, \quad y(1) = 1,$ $\qquad [-\frac{1}{9}(13x^2 - 3\ln x - 4)]$

(e) $\quad y' + \sqrt{x}y = 3x^2, \quad y(1) = -\dfrac{3}{2},$ $\qquad [y(x) = 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2}]$

(f) $\quad y' + y\cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 1.$ $\qquad [y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-\sin x} + \sin x - 1]$

Příklad 7. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $\quad y' + 2xy = 4x,$ $\qquad [y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2]$

(b) $\quad x' = x\cos t + \sin 2t.$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{\sin t} - 2(1 + \sin t)]$

Příklad 8 (metoda odhadu)**.** Metodou odhadu nebo metodou variací konstanty stanovte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $\quad x' = 3x - \mathrm{e}^{2t},$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{2t}]$

(b) $\quad x' + 2x = 3\,\mathrm{e}^{5t},$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{7}\,\mathrm{e}^{5t}]$

(c) $\quad x' + 2x = 5\,\mathrm{e}^{-2t},$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{-2t} + 5t\,\mathrm{e}^{-2t}]$

(d) $\quad x' + x = 1 - t^2,$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{-t} - t^2 + 2t - 1]$

(e) $\quad x' - 2x = 2\cos t,$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{4}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t]$

(f) $\quad x' = 7x + \cos 2t - 3\sin 2t.$ $\qquad [x(t) = C\,\mathrm{e}^{7t} - \frac{1}{53}\cos 2t + \frac{23}{53}\sin 2t]$

Příklad 9 (diferenciální rovnice vyššího řádu)**.** Řešte počáteční úlohy

(a) $\quad y''' = \sin x + \mathrm{e}^{-2x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{1}{4},\ y''(0) = \dfrac{1}{2},$ $\quad [y(x) = \cos x - \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x} + x^2 + \frac{1}{8}]$

(b) $\quad y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2,$ $\qquad [y(x) = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}]$

(c) $\quad x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$ $\qquad [y(x) = \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)]$

Příklad 10. Stanovte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $\quad y''' - \sqrt{1 + (y'')^2} = 0,$ $\qquad [y(x) = \sinh x + C_1 + C_2x + C_3]$

(b) $\quad xy^{(4)} + y''' = 0.$ $\qquad [y(x) = C_1x^2\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4}\right) + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4]$

Příklad 11 (charakteristická rovnice)**.** Řešte následující úlohy

(a) $\quad x'' - 5x' - 6x = 0,$ $\qquad [x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{6t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}]$

(b) $\quad x''' - 6x'' + 13x' = 0,$ $\qquad [x(t) = C_1 + \mathrm{e}^{3t}(C_2\cos 2t + C_3\sin 2t)]$

(c) $\quad y'' + 4y' + 4y = 0,$ $\qquad [y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(C_1 + C_2t)]$

(d) $\quad y'' - 4y' + 13y = 0,$ $\qquad [y(x) = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)]$

(e) $\quad y'' + 6y' + 9y = 0,$ $\qquad [y(x) = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-3x}]$

(f) $\quad y^{(4)} - y = 0,$ $\qquad [y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{t} + C_3\cos t + C_4\sin t]$

(g) $\quad y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 0,$ $\qquad [y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t)]$

(h) $\quad y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,$ $\qquad [y(t) = \mathrm{e}^{-t}(C_1t^2 + C_2t + C_3)]$

(i) $\quad 4y'' - 8y' + 5y = 0,$ $\qquad [y(x) = \mathrm{e}^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)]$

(j) $\quad y''' - 8y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 0.$
$\qquad [y(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x - \cos\sqrt{3}x)]$

Příklad 12 (lineární nehomogenní rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty). Metodou odhadu nebo metodou variací konstant řešte úlohy

(a) $x'' + 6x' + 5x = 25t^2 - 2,$ $\quad [x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-5t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + 5t^2 - 12t + 12]$

(b) $x'' - 2x' + 10x = 36 \cos 3t,$ $\quad [x(t) = \mathrm{e}^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + \cos 3t - 6 \sin 3t]$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 3t - 8 \mathrm{e}^t,$ $\quad [y(t) = \mathrm{e}^{3t}(C_1 + C_2 t) + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9} - 2 \mathrm{e}^t]$

(d) $y''' + 4y' = 8 \mathrm{e}^{2t} + 5 \mathrm{e}^t \sin t,$ $\quad [y(t) = C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t + {} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4} \mathrm{e}^t (\sin t - 3 \cos t)]$

(e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^x,$ $\quad [y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \mathrm{e}^x + \frac{x^3}{6} \mathrm{e}^x]$

(f) $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6},$ $\quad [y(x) = -\frac{x}{3} \cos 3x + \left(1 + \frac{1}{9} \ln \sin 3x\right) \sin 3x]$

(g) $y'' - 4y = 3x^3 \mathrm{e}^x,$ $\quad [y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} - \left(\frac{40}{9} + \frac{14}{3}x + 2x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^x]$

(h) $y'' - 8y' + 20y = 5x \mathrm{e}^{4x}(\sin 2x + \cos 2x).$ $\quad [y(x) = \mathrm{e}^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + {} + \frac{5x \mathrm{e}^{4x}}{16}[(1 - 2x) \cos 2x + (1 + 2x) \sin 2x]]$