Spojité deterministické modely I
Písemná část zkoušky 15. 12. 2011

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $tx' - x = x \ln \dfrac{x}{t}$.

2. Určete parametr a tak, aby počáteční úloha $tx' = x$, $x(0) = a$ měla alespoň jedno řešení definované na intervalu $[0, \infty)$.

3. Najděte první tři členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací řešení počáteční úlohy $x'' = t - x$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4. Najděte maximální a minimální řešení úlohy $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$, $x(0) = 0$ na intervalu $[0, \infty)$.

5. Najděte všechny izolované singulární body autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 5y \\ y' &= x - 2y + 1 \end{aligned}$$

a určete jejich typ.

6. Nechť $x = x(t)$ je řešení počáteční úlohy $x' = 2x^2 - (x^3 + x)$, $x(1) = \alpha$. Určete, pro které hodnoty parametru α je funkce x rostoucí, pro které hodnoty je klesající a pro které hodnoty je periodická.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= -x - y - z + 2\cos t, \end{aligned} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = -\frac{1}{2},\ z(0) = 1.$$

2. Zdroj podléhající rozkladu je pravidelně dodáván konzumentovi. Tato situace může být popsána modelem

$$\begin{aligned} x' &= a - x - xy, \\ y' &= xy - by, \end{aligned}$$

kde x označuje množství zdroje a y velikost populace konzumenta, parametry a, b jsou kladné. (Ve volných chvílích po zkoušce si můžete promyslet interpretaci modelu a parametrů, jednotky, v jakých je uváděn čas a velikosti x, y.)

Najděte podmínky, za jakých může dojít k dynamické rovnováze zdroje a konzumenta; přitom množství zdroje i velikost populace konzumenta mají být nenulové. Je tato rovnováha dlouhodobě udržitelná?

3. Systém

$$\begin{aligned} S' &= (b - d)S - \beta SI + \gamma I, \\ I' &= \beta SI - \gamma I - dI, \end{aligned}$$

kde všechny parametry jsou kladné a $b > d$, představuje model epidemie SIS s vitální dynamikou za předpokladu, že choroba způsobuje neplodnost. Populace přitom nevykazuje vnitrodruhovou konkurenci, zdravá populace (tj. bez přítomnosti infekce) by rostla exponenciálně.

Najděte podmínky, za jakých choroba stabilizuje velikost populace.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6 × 1 bod, II. část 3 × 2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Spojité deterministické modely I
Písemná část zkoušky 5. 1. 2012

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $tx' + x = x^2 \ln t$.
2. Rozhodněte, zda úloha $x' = \sqrt[5]{x^2}$, $x(0) = 0$ je na intervalu $[0, \infty)$ jednoznačně řešitelná.
3. Najděte první tři členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací řešení počáteční úlohy $x'' = x^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
4. Odhadněte řešení problému $x' = \dfrac{tx}{1+x^2}$, $x(0) = 1$ na intervalu $[0, \infty)$, tj. najděte funkce φ, ψ takové, že $\varphi(t) \le x(t) \le \psi(t)$ pro všechna $t \ge 0$.
5. Určete parametr ε tak, aby autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + \varepsilon y \end{aligned}$$

měl nekonstantní periodické řešení.
6. Vyšetřete stabilitu a asymptotickou stabilitu konstantních řešení autonomní rovnice

$$x' = \sin x.$$

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$x^{(7)} + 2x^{(5)} + x^{(3)} = 6, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = 6,\ x^{(4)}(0) = x^{(5)}(0) = x^{(6)}(0) = 0.$$

2. Nechť $x(t)$, $y(t)$ je řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x' &= x(1 - x - ay) - m_1 x, \\ y' &= ry(1 - bx - y) - m_2 y, \end{aligned} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = \varepsilon > 0,$$

přičemž platí $a > 1$, $0 < b < 1$, $ab < 1$, $r > 0$. Určete $\lim_{t\to\infty} x(t)$ a $\lim_{t\to\infty} y(t)$ v případě

a) $m_1 = m_2 = 0$,

b) $m_1 \ge 0$, $0 < a\left(1 - \dfrac{m_2}{r}\right) < 1 - m_1 < \dfrac{1}{b}\left(1 - \dfrac{m_2}{r}\right)$.

(Ve volných chvílích zkuste úlohu interpretovat.)

3. Systém

$$\begin{aligned} S' &= (b - d_1)S - \beta IS + bI, \\ I' &= \beta IS - d_2 I, \end{aligned}$$

v němž jsou všechny parametry kladné představuje model epidemie typu SI s koeficientem nákazy β a s vitální dynamikou. Přitom choroba neovlivňuje plodnost, tj. v obou skupinách je plodnost b stejná; choroba ovlivňuje úmrtnost tak, že ve skupině nemocných (I) je úmrtnost d_2 větší než plodnost, zatímco ve skupině zdravých (S) je úmrtnost d_1 menší než plodnost. Potomci zdravých i nemocných jedinců jsou při narození zdraví.

Najděte stacionární řešení s oběma složkami kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6 × 1 bod, II. část 3 × 2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Spojité deterministické modely I
Písemná část zkoušky 12. 1. 2012

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $tx' = x\,(1 + \ln x - \ln t)$.
2. Určete parametr a tak, aby počáteční úloha $tx' = x$, $x(0) = a$ měla řešení na intervalu $[0, \alpha)$, kde $\alpha > 0$.
3. Najděte první čtyři členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací řešení počáteční úlohy $x' = t - x$, $x(0) = 1$.
4. Zjistěte, zda množina řešení systému diferenciálních rovnic

$$x' = y, \quad y' = x^2$$

tvoří vektorový prostor (podprostor vektorového prostoru diferencovatelných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nad polem reálných čísel).
5. V závislosti na parametru ε určete typ singulárního bodu $(0, 0)$ autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + \varepsilon\left(1 - x^2\right) y. \end{aligned}$$

6. Vyšetřete stabilitu konstantních řešení rovnice $x' = x\dfrac{1-x}{1+x}$.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$x''' + x'' + x' + x = 2\cos t, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = \tfrac{1}{2},\ x''(0) = 2.$$

2. Najděte invariant systému
$$\begin{aligned} S' &= \delta(I + R) - \beta SI, \\ I' &= -\delta I + \beta SI - \nu I, \\ R' &= -\delta R + \nu I \end{aligned}$$

a transformujte ho na systém dvojrozměrný. Najděte podmínku, kterou musí splňovat kladné parametry β, δ, ν, aby existoval stacionární bod systému se všemi složkami kladnými. Vyšetřete stabilitu takového stacionárního bodu. (Systém představuje model epidemie SIR s vitální dynamikou; choroba neovlivňuje plodnost ani úmrtnost, nepřenáší se na potomky, populace je v dynamické rovnováze se svým prostředím. Hledáme podmínky, za jakých choroba z populace nevymizí.)

3. Uvažujme populaci, jejíž vnitřní koeficient růstu je $r > 0$ a kapacita prostředí pro ni je $K_1 > 0$. Ve stabilizované populaci se objeví mutace: mutanti využívají zdroje prostředí s jinou efektivitou, tj. kapacita prostředí pro ně je $K_2 \neq K_1$, $K_2 > 0$. Možný model popsané situace je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= rN_1\left(1 - \frac{N_1 + N_2}{K_1}\right), \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= rN_2\left(1 - \frac{N_1 + N_2}{K_2}\right), \qquad N_1(0) = K_1 - \varepsilon, \quad N_2(0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $\varepsilon > 0$; N_1 označuje velikost původní populace, N_2 označuje velikost populace mutantů. Za jaké podmínky mutovaná populace na dané lokalitě převládne?

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6×1 bod, II. část 3×2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Spojité deterministické modely I
Písemná část zkoušky 19. 1. 2012

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $x' = -2x + \mathrm{e}^t x^2$.
2. Rovnici druhého řádu $x'' + txx' = 0$ převeďte na systém rovnic prvního řádu. Řešení výsledného systému již nepočítejte.
3. Nechť funkce $\varphi(t, a)$ je řešení počátečního problému $x' = t \operatorname{arctg} x$, $x(0) = a$ (tj.

$$\frac{\partial \varphi(t,a)}{\partial t} = t \operatorname{arctg} x, \quad \varphi(0, a) = a).$$

Rozhodněte, zda funkce dvou proměnných φ je spojitá. Odpověď zdůvodněte.
4. Určete, pro jaké hodnoty parametru ε má rovnice $x'' + \varepsilon x' + x = 0$ nekonstantní periodické řešení.
5. Najděte všechna konstantní řešení autonomní rovnice $x' = -\sqrt[3]{x^2 - 1}$ a vyšetřete jejich stabilitu.
6. Najděte Ljapunovskou funkci systému

$$x' = 2x\,(1 - x) - xy, \qquad y' = -\tfrac{1}{2}y + xy$$

pro stacionární řešení, které má obě složky kladné.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= -2x - 2y - z + 3, \end{aligned} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = \frac{1}{2},\ z(0) = -\frac{1}{2}.$$

2. Vývoj interagujících populací je popsán systémem rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x\left(1 - \frac{x}{1 + a_{12}y}\right), \\ y' &= ry\left(1 - \frac{y}{1 + a_{21}x}\right); \end{aligned}$$

x a y označují velikosti populací, parametry a_{12}, a_{21}, r jsou kladné. Najděte podmínky, za jakých mohou obě populace dlouhodobě koexistovat. (Ve volných chvílích si můžete rozmyslet, o jaký typ interakce se jedná.)

3. Uvažujte autonomní systém

$$x' = x\left(\varphi(y) - \tfrac{1}{10}\right), \qquad y' = y(1 - 2x),$$

kde

$$\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & 0 < y \le \frac{4}{5}, \\ 10y - \frac{17}{2}, & \frac{4}{5} < y < 1; \end{cases}$$

(jedná se o speciální případ Goodwinova modelu dynamiky mezd a zaměstnanosti). Rozhodněte o stabilitě stacionárních bodů a najděte první integrál (invariant) tohoto systému.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6 × 1 bod, II. část 3 × 2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Spojité deterministické modely I
Písemná část zkoušky 26. 1. 2012

I. část

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $tx' + 2x + t^5x^3\mathrm{e}^t = 0$.
2. Nechť funkce $\varphi = \varphi(t,a)$ je řešení počátečního problému $tx' = x$, $x(0) = a$, tj.

$$t\frac{\partial\varphi(t,a)}{\partial t} = \varphi(t,a), \quad \varphi(0,a) = a.$$

Určete definiční obor funkce φ. (Jinak řečeno: zjistěte, pro jaké hodnoty parametru a má uvedená úloha řešení a najděte interval, na němž je definováno úplné řešení.)
3. Ekvidimensionální neautonomní rovnici druhého řádu $tx'' + x' = 0$ převeďte na lineární rovnici s konstantními koeficienty. Řešení transformované rovnice již nepočítejte.
4. Určete, pro jaké hodnoty parametru ε je stacionární bod $(0,0)$ autonomního systému

$$x' = \varepsilon x - y, \qquad y' = x - 2y$$

stabilním uzlem.
5. Nechť funkce $x = x(t)$ je řešením počáteční úlohy $x' = \cos x^2$, $x(0) = 0$. Určete limitu $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.
6. Nechť $V(x,y) = x + y - \ln xy$. Vypočítejte derivaci funkce V vzhledem k systému

$$x' = x - xy, \quad y' = xy - y.$$

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému pro nehomogenní systém lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= y + \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}, \end{aligned} \qquad x(0) = -\ln 4,\ y(0) = -\ln 2.$$

2. Uvažujte autonomní systém rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x + (x + K - \lambda)y, \\ y' &= x - (x+K)y \end{aligned}$$

ve fázovém prostoru $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Pro parametry K, λ platí $K > \lambda > 0$.

a) Najděte všechny stacionární body tohoto systému, vyšetřete jejich stabilitu a určete jejich typ.

b) Rozhodněte, pro jaké počáteční podmínky $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ jsou obě složky řešení (tj. funkce x, y) monotonní.

3. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} u' &= u(v - \tfrac{1}{2}), \\ v' &= v(1 - 2u), \end{aligned}$$

(jedná se o speciální případ Goodwinova modelu vzniku hospodářského cyklu s lineární závislostí relativní změny mezd na zaměstnanosti).

Rozhodněte o stabilitě všech stacionárních bodů a najděte první integrál (invariant) tohoto systému.

Čas na vypracování: I. část 60 minut, II. část 90 minut.
Bodování: I. část 6 × 1 bod, II. část 3 × 2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E, 0=F.

Spojité deterministické modely I
Písemná část zkoušky 9. 2. 2012

I. část

1. Najděte obecné řešení počáteční úlohy $(t+2x)\mathrm{d}t + (x+2t)\mathrm{d}x = 0$, $x(1) = 1$.
2. Rozhodněte, zda řešení počáteční úlohy $tx' = x$, $x(0) = 0$ pro implicitní diferenciální rovnici prvního řádu závisí spojitě na počáteční podmínce.
3. Riccatiho rovnici $t^3x' - t^4x^2 - t^2x = 2$ převeďte na lineární homogenní rovnici druhého řádu. Řešení transformované rovnice již nepočítejte.
4. Určete, pro jaké hodnoty parametru a je stacionární bod $(0,0)$ autonomního systému

$$x' = ax - 2y, \qquad y' = 3x - y$$

stejnoměrně stabilní ale nikoliv asymptoticky stabilní.
5. Nechť funkce $x = x(t)$ je řešením počáteční úlohy $x' = 2\mathrm{e}^{-x^2} - 1$, $x(0) = 1$. Určete $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.
6. Najděte ljapunovskou funkci systému

$$x' = x - xy, \quad y' = xy - y$$

v jeho stacionárním bodě $(1,1)$.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \operatorname{cotg} t - x, \end{aligned} \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \\ y' &= sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) - axy \end{aligned}$$

ve fázovém prostoru $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$; jeho parametry K,L, r, s, a jsou kladné. (Systém modeluje vývoj velikostí dvou populací ve vztahu amenzalismu.) Určete, jaké podmínky musí parametry splňovat, aby existoval stejnoměrně stabilní stacionární bod (x^*, y^*) systému takový, že $x^* > 0$, $y^* > 0$ (tj. aby byla možná dlouhodobá koexistence populací).

3. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} S' &= (b-d)S - \beta SI + \gamma I, \\ I' &= \beta SI - \gamma I - dI \end{aligned}$$

ve fázovém prostoru $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ s kladnými parametry b, d, β, γ, přičemž $b > d$. Najděte stacionární bod systému s oběma složkami kladnými, určete jeho typ a vyšetřete jeho stabilitu.

Systém představuje model epidemie typu SIS s vitální dynamikou za předpokladů: Infekce neovlivňuje úmrtnost, infekce způsobuje sterilitu (pouze zdraví jedinci mají potomky), populace nevykazuje vnitrodruhovou konkurenci (populace bez choroby by rostla exponenciálně). Hledáme, za jakých podmínek epidemie populaci stabilizuje a jaký je poměr plodných a sterilních jedinců ve stabilizované populaci.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6 × 1 bod, II. část 3 × 2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E, 0=F.
