Obsah

Kapitola 1

Diferenciální rovnice 1. řádu rozřešená vzhledem k derivaci

Obecný tvar:

$$\boxed{y' = F(x, y)} \tag{1.1}$$

1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)} \tag{1.2}$$

Obecný tvar řešení:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C \tag{1.3}$$

Příklad 1.1. $x^2 y' + y = 0$

Příklad 1.2. $2y'\sqrt{x} = y$

Příklad 1.3. $y' = 2\sqrt{y}\ln x \quad y(e) = 1$

Příklad 1.4. $xy' + y = y^2 \quad y(1) = \frac{1}{2}$

Příklad 1.5. $(1 + y^2)\,\mathrm{d}x - xy(1 + x^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Speciální tvar:

$$\boxed{y' = f(ax + by + c)} \tag{1.4}$$

Zavádíme substituci: $z = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'-a}{b}$

Řešíme rovnici: $\dfrac{z'-a}{b} = f(z)$

Příklad 1.6. $y' + 1 = x + y$

Domácí úkol: $y' = x + 2y \qquad [y = \frac{1}{4}Ke^{2x} - 1 - 2x]$

Příklad 1.7. $y' = (x + y + 2)^2$

1.2 Homogenní rovnice

$$\boxed{y' = f(\tfrac{y}{x})} \tag{1.5}$$

Zavádíme substituci: $u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u \quad \Rightarrow \quad u'x + u = f(x)$

Řešíme rovnici: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$

Příklad 1.8. $(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$

Příklad 1.9. $y^2 + x^2y' = xyy'$

Příklad 1.10. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

Speciální tvar:

$$\boxed{y' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}} \tag{1.6}$$

1. $\gamma = c = 0$
   (a) $\alpha b - a\beta = 0 \;\Rightarrow\; y' = konst.$

(b) $\alpha b - a\beta \neq 0 \;\Rightarrow\; y' = f\left(\dfrac{\alpha + \beta\frac{y}{x}}{a + b\frac{y}{x}}\right)$ – homogenní rovnice

2. $\gamma^2 + c^2 \neq 0$

(a) $\alpha b - a\beta \neq 0 \;\Rightarrow\;$ $\alpha m + \beta n + \gamma = 0$ (bod $[m; n]$ je průsečík dvou přímek)

$$\begin{array}{llll} & am + bn + c = 0 & & \\ \hline \text{subs.:} & x = u + m & & \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ & y = v + n & & \mathrm{d}y = \mathrm{d}v \end{array}$$

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\dfrac{\alpha u + \beta v}{au + bv}\right)$ což vede na případ 1.(b)

(b) $\alpha b - a\beta = 0,\; b \neq 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\beta}{b}a$

Dostáváme: $y' = f\left(\dfrac{\frac{\beta}{a}(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right)$ subs.: $z = ax + by \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{b}(z' - a) \;\Rightarrow$

$\frac{1}{b}(z' - a) = f\left(\dfrac{\frac{\beta}{b}z + \gamma}{z + c}\right)$ – rovnice se separovanými proměnnými

Příklad 1.11. $y' = \dfrac{x + 2y - 7}{x - 3}$

Příklad 1.12. $y' = -\dfrac{2x + 3y - 1}{2x + 3y - 5}$

Příklad 1.13. $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$

Příklad 1.14. $y' = \dfrac{x - y + 1}{x + y + 3}$

1.3 Lineární rovnice

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)} \tag{1.7}$$

1. způsob řešení

(a) **homogenní část:** $y' = a(x)y$ – rovnice se separovanými proměnnými

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y \;\Rightarrow\; y = C \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

(b) **nehomogenní část:** Řešní hledáme ve tvaru získaného z řešení hom. rovnice:

$$y = C(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x},$$

zderivujeme a dosadíme do zadání $\Rightarrow$ $C(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + K.$

2. způsob řešení – celou rovnici vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$

$$
\begin{aligned}
y'\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - a(x)y\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} &= b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\\
\left[y\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right]' &= b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\\
y &= \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]
\end{aligned}
$$

Příklad 1.15. $y' = -2xy + x\mathrm{e}^{-x^2}$

Příklad 1.16. $y' = x + 2y \quad y(0) = 1$

Příklad 1.17. $y' = 4xy + (2x+1)\mathrm{e}^{2x^2}$

Příklad 1.18. $y'\cos x + 2y\sin x = 2\sin x$

1.4 Bernoulliova rovnice

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^r} \tag{1.8}$$

$r \neq 0, 1$

Zavádíme substituci: $z = y^{1-r} \;\Rightarrow\; z' = (1-r)y^{-r}y' \;\Rightarrow\; y^{-r}y' = \frac{z'}{1-r}$

Původní rovnici vynásobíme y^{-r} a dosadíme substituci:

$$
\begin{aligned}
y^{-r}y' &= a(x)y^{1-r} + b(x)\\
\frac{z'}{1-r} &= a(x)z + b(x)\\
z' &= (1-r)a(x)z + (1-r)b(x) \quad \Rightarrow \text{ lineární rovnice}
\end{aligned}
$$

- pro $r > 0$ přidáme řešení $y \equiv 0$

Příklad 1.19. $xy' - y = -xy^2$

Příklad 1.20. $y' + y + y^2\mathrm{e}^x = 0$

Příklad 1.21. $3y^2y' - 4y^3 = x + 1$

1.5 Exaktní rovnice

$$\boxed{M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0} \tag{1.9}$$

$\mathrm{d}F = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$ – totální diferenciál funkce $F(x,y) \;\Rightarrow\; F(x,y) = C$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \tag{1.10}$$

Nutná podmínka: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Příklad 1.22. $(3x^2y^2 + 7)\,\mathrm{d}x + 2x^3y\,\mathrm{d}y = 0$

Příklad 1.23. $(\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x + 3)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y - 2)\,\mathrm{d}y = 0$

Pokud neplatí $M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = N_x$, pak lze celou rovnici vynásobit vhodným výrazem (integrační faktor), např.:

$$\ln m(x) = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,\mathrm{d}x \qquad \text{nebo} \qquad \ln n(y) = \int \frac{N_x - M_y}{M}\,\mathrm{d}y \tag{1.11}$$

Příklad 1.24. $(x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$

Kapitola 2

Diferenciální rovnice 1. řádu nerozřešené vzledem k derivaci

$$\boxed{x = f(y') \qquad y = g(y') \qquad x = f(y, y') \qquad y = g(x, y')} \tag{2.1}$$

Zavádíme substituci: $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = x(p) \\ y = y(p) \end{matrix} \;\Rightarrow$ dostáváme parametrické vyjádření řešení.

Pokud lze p osamostatnit $\Rightarrow$ dosadíme a vyjádříme $y = h(x)$.

Příklad 2.1. $2y' + \sin y' - x = 0$

Příklad 2.2. $x = y' + \ln y'$

Příklad 2.3. $(y')^2 \mathrm{e}^{y'} - y = 0$

Příklad 2.4. $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$

Příklad 2.5. $y = 2xy' + \frac{1}{2}x^2 + (y')^2$

2.1 Lagrangeova rovnice

$$\boxed{y = xf(y') + g(y')} \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
y &= xf(p) + g(p) && \text{[zderivujeme podle } x\text{]}\\
p = y' &= f(p) + x\frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\\
p - f(p) &= (f'(p)x + g'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} && [p - f(p) \neq 0,\ x = x(p)]\\
x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} &= \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}
\end{aligned}
$$

$x = x(p)$ dosadíme do zadání.

Příklad 2.6. $y = x(y')^2 + (y')^3$

2.2 Clairautova rovnice

$$\boxed{y = xy' + g(y')} \tag{2.3}$$

Speciální případ Lagrangeovy pro $f(p) = p$

$$
\begin{aligned}
y &= xp + g(p)\\
p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\\
(x + g'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= 0
\end{aligned}
$$

1. $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + g(C)$
2. $x = -g'(p)$ – parametrické vyjádření řešení.
   $y = -g'(p)p + g(p)$

Příklad 2.7. $y = xy' + \frac{a}{y'}$

Domácí úkol: $y = xy' - 2 - y'$ $[y = Cx - 2 - C]$

Příklad 2.8. $y = xy' - \ln y'$

Kapitola 3

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)} \tag{3.1}$$

$a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
$f(x) = 0$ – homogenní rovnice
$f(x) \neq 0$ – nehomogenní rovnice

1. $\mathbf{ay'' + by' + cy = 0}$

   Řešení očekáváme ve tvaru $y = C_1y_1 + C_2y_2$, kde y_1 a y_2 jsou dvě různá řešení, pro která platí:

   $$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

   Konkrétní tvary funkcí y_1 a y_2 najdeme pomocí **charakteristické rovnice:**

   $$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.2}$$

   (a) $D > 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$

   $$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \quad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

   (b) $D = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = -\frac{b}{2a}$

   $$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x}$$

   (c) $D < 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

   $$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \quad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

Příklad 3.1. $y'' + 6y' + 13y = 0$

Příklad 3.2. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Příklad 3.3. $y'' - 5y' + 6y = 0$

2. $\mathbf{ay'' + by' + cy = f(x)}$

Řešení je ve tvaru: $y = y_0 + y_p$, kde y_0 je řešení příslušné homogenní rovnice a y_p je jedno partikulární řešení.

Metody hledání y_p:

(a) **Metoda variace konstant**

$y_0 = C_{11}y_1 + C_{12}y_2,\ C_{11}, C_{12} \in \mathbb{R}$

$y_p = C_{21}(x)y_1 + C_{22}(x)y_2$:

$$C_{21}(x) = \int K_1 \,\mathrm{d}x, \quad C_{22}(x) = \int K_2 \,\mathrm{d}x, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} K_1y_1 + K_2y_2 &= 0 \\ K_1y_1' + K_2y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_{21}(x) = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x,\ C_{22}(x) = \int \frac{W_2}{W}\,\mathrm{d}x$, kde W, W_1, W_2 jsou tzv. Wronckiány:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Příklad 3.4. $y'' - 3y' + 2y = x^2$

(b) **Metoda neurčitých koeficientů**

i. $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} Q_m(x)$

$y_p = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \overline{Q}_m(x)$, kde k udává násobnost α jako kořene char. rovnice.

ii. $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$

$y_p = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}(\overline{P}_q(x)\cos\beta x + \overline{Q}_q(x)\sin\beta x)$, kde $q = \max\{m, n\}$;

$k = 1$, když $\alpha \pm \beta i$ je kořenem char. rovnice

$k = 0$, když $\alpha \pm \beta i$ není kořenem char. rovnice.

iii. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, kde $f_i(x)$ jsou funkce tvaru i. nebo ii.

$ay'' + by' + cy = f_i(x),\ i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow\ y_{pi}$

$y_p = \ y_{p1} + \ y_{p1} + \cdots + \ y_{pn}$

Příklad 3.5. $y'' - 3y' + 2y = x^2$

Příklad 3.6. $y'' - 3y' + 2y = \cos x + \sin x$

Příklad 3.7. $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}$

Kapitola 4

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstatními koeficienty

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)} \tag{4.1}$$

1. **Homogenní:** Řešení hledáme ve tvaru $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$.

   Příslušná charakteristická rovnice:

   $$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

   (a) $\lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_i : \mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots x^{p-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $n(\lambda) = p$ je násobnost kořene

   (b) $\lambda = \alpha \pm \beta i \;\Rightarrow\; y_i :$ $\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{p-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{p-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$ $, n(\lambda) = 2p$

Příklad 4.1. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Příklad 4.2. $y^{(4)} - y^{(3)} + y^{(2)} - y^{(1)} = 0 \qquad y(0) = y^{(1)}(0) = 1;\; y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$

Příklad 4.3. $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 6y^{(2)} + 4y^{(1)} - 8y = 0$

2. **Nehomogenní:** $y = y_0 + y_p$

   (a) **Metoda variace konstant**

   $y_0 = C_{11}y_1 + C_{12}y_2 + \dots + C_{1n}y_n,\; C_{1i} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$

   $y_p = C_{21}(x)y_1 + C_{22}(x)y_2 + \dots + C_{2n}(x)y_n$:

   $$C_{21}(x) = \int K_1 \,\mathrm{d}x,\; C_{22}(x) = \int K_2 \,\mathrm{d}x,\; \dots \quad C_{2n}(x) = \int K_n \,\mathrm{d}x,$$

kde

$$\begin{array}{llll} K_1y_1 & +K_2y_2 & +\cdots+K_ny_n & =0 \\ K_1y_1' & +K_2y_2' & +\cdots+K_ny_n' & =0 \\ \vdots & & & \\ K_1y_1^{(n-2)} & +K_2y_2^{(n-2)} & +\cdots+K_ny_n^{(n-2)} & =0 \\ K_1y_1^{(n-1)} & +K_2y_2^{(n-1)} & +\cdots+K_ny_n^{(n-1)} & =f(x) \end{array}$$

Příklad 4.4. $y''' - y'' = x^2$

(b) **Metoda neurčitých koeficientů**

i. $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} Q_m(x)$

$y_p = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \overline{Q}_m(x)$, kde $n(\alpha) = k$.

ii. $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$

$y_p = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}(\overline{P}_q(x)\cos\beta x + \overline{Q}_q(x)\sin\beta x)$, kde $q = \max\{m, n\}$ a $n(\alpha \pm \beta i) = 2k$.

iii. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)$, kde $f_i(x)$ jsou funkce tvaru i. nebo ii.
$ay'' + by' + cy = f_i(x),\ i = 1, \ldots, m \ \Rightarrow\ y_{pi}$

$y_p = \ y_{p1} + \ y_{p1} + \cdots + \ y_{pm}$

Příklad 4.5. $y''' - y'' = x^2$

Příklad 4.6. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$

Příklad 4.7. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y^{(2)} = e^x + x^3$

Pokud je $u + iv$ řešením rovnice:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = P(x)\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x} \tag{4.2}$$

pak u je řešením

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \tag{4.3}$$

a v je řešením

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \tag{4.4}$$

Příklad 4.8. $y'' - y = (x-1)\sin 2x$

Příklad 4.9. $y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = \cos x$

Příklad 4.10. $y''' + y'' + y' + y = 2\cos x$

Kapitola 5

Systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstaními koeficienty

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)',\ \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}} \tag{5.1}$$

1. $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{0}$ – dostáváme n lineárně nezávislých řešení $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$, které tvoří **fundamentální systém**.

   Obecné řešní je tvaru:

   $$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{y}_n, \tag{5.2}$$

   kde

   $$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{h}\mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{5.3}$$

   $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$; λ jsou vl. čísla matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{h}$ jsou příslušné vl. vektory.

   (a) $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ n(\lambda_i) = 1, i = 1, \dots, m$

   $$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{h}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \dots, \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{h}_m\mathrm{e}^{\lambda_m x}$$

   (b) $n(\lambda_i) = p > 1$

   $$\boldsymbol{y}_{i1} = \boldsymbol{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \boldsymbol{y}_{i2} = \boldsymbol{h}_2 x\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \dots, \boldsymbol{y}_{ip} = \boldsymbol{h}_p x^{p-1}\mathrm{e}^{\lambda_i x}$$

   (c) $\lambda = \alpha \pm \beta i \ \Rightarrow\ \boldsymbol{h}$ je vlastní vektor a platí $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu} i$

   $$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{\mu} \quad \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{\nu}$$

Příklad 5.1.
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

Příklad 5.2.
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' &= - y_2 + 2y_3 \end{aligned}$$

Příklad 5.3. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \\ y_3' &= 3y_1 \qquad + y_3 \end{aligned}$

Příklad 5.4. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + y_2 \end{aligned}$

Příklad 5.5. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$

2. $\boldsymbol{b}(x) \not\equiv \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{y}_p \tag{5.4}$$

(a) $\boldsymbol{b}(x) = \boldsymbol{P}_m(x)$, pokud 0 není vl. číslo
$\boldsymbol{y}_p = \overline{\boldsymbol{P}_m}(x)$

Příklad 5.6. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + x \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 - 1 \end{aligned}$

(b) $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\boldsymbol{P}_m(x)$. Zavedeme substituci: $\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}\boldsymbol{u}$, po dosazení převedeme na předchozí případ.

Příklad 5.7. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + \ e^x \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - x e^x \end{aligned}$

(c) $\boldsymbol{b}_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\boldsymbol{P}_m(x)\cos\beta x$
$\boldsymbol{b}_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\boldsymbol{P}_m(x)\sin\beta x$
Je-li $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ řešením $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\boldsymbol{P}_m(x)$, pak $\boldsymbol{u}$ je řešením $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_1(x)$ a $\boldsymbol{v}$ je řešením $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_2(x)$.

Příklad 5.8. $\begin{aligned} y_1' &= \qquad y_2 + \cos x \\ y_2' &= y_1 - y_2 + \quad x \end{aligned}$

Kapitola 6

Autonomní systémy

6.1 Lineární autonomní systémy v rovině

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \tag{6.1}$$

Typy stacionárního bodu $(0,0)$:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1\lambda_2 > 0 \ \Rightarrow$ **uzel**
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1\lambda_2 < 0 \ \Rightarrow$ **sedlo**
3. $\lambda_{1,2} = \pm\beta i \ \Rightarrow$ **střed**
4. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha \neq 0 \ \Rightarrow$ **ohnisko**

Nulkliny: množiny, kde platí $y_i' = 0$

Určení typu stacionárního bodu:

$$\det\boldsymbol{A} < 0 \qquad \Rightarrow \text{sedlo} \tag{6.2}$$

$$\det\boldsymbol{A} > 0 \quad \wedge \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 - 4\det\boldsymbol{A} > 0 \quad \Rightarrow \text{uzel} \tag{6.3}$$

$$\wedge \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 - 4\det\boldsymbol{A} < 0 \quad \Rightarrow \text{ohnisko} \tag{6.4}$$

$$\wedge \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{A} = 0 \quad \Rightarrow \text{střed} \tag{6.5}$$

Příklad 6.1. $x' = 3x + 4y$
$y' = 2x + y$

Příklad 6.2. $x' = 2y - 3x$
$y' = x - 4y$

Příklad 6.3. $x' = 6x - 5y$
$y' = x + 3y$

Příklad 6.4. $x' = 3x + y$
$y' = \phantom{3x+{}} y - x$

Příklad 6.5. $x' = x - y$
$y' = 2x - y$

Příklad 6.6. $x' = 3x$
$y' = 3y$

6.2 Nelineární autonomní systémy v rovině

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= f(y_1, y_2) \\ y_2' &= g(y_1, y_2) \end{aligned}} \tag{6.6}$$

Stacionární bod $\hat{\boldsymbol{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ splňuje podmínku: $f(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = g(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = 0$

Variační matice:

$$\boldsymbol{J}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial g(y_1,y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

λ_1, λ_2 jsou vl. čísla matice $\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$:

1. pokud je $\det(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) < 0$ pak $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{y}}$ je sedlo;
2. pokud je $\det(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) > 0$ a navíc platí:
   (a) $4\det(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) < \mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2))^2$, pak
   $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) < 0$ pak $\lambda_{1,2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{y}}$ je stabilní uzel;
   $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) > 0$ pak $\lambda_{1,2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{y}}$ je nestabilní uzel;
   (b) $4\det(\mathbf{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) > \mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2))^2$, pak
   $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) < 0$ pak $\lambda_{1,2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{y}}$ je stabilní ohnisko;
   $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) > 0$ pak $\lambda_{1,2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{y}}$ je nestabilní ohnisko;
   (c) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(\hat{y}_1, \hat{y}_2)) = 0$ pak $\hat{\boldsymbol{y}}$ je bod rotace nebo ohnisko.

Příklad 6.7. $$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y - 5 \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$$

Příklad 6.8. $$\begin{aligned} x' &= -2x + y - 6x^3 + 9y^5 \\ y' &= {-x} - 2y + 2x^3 - 3y^5 \end{aligned}$$

Příklad 6.9. $$\begin{aligned} x' &= x^2 + y^2 - 6x - 8y \\ y' &= x(2y - x + 5) \end{aligned}$$