

Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozložení

Motivace: V této situaci je naším úkolem porovnat střední hodnoty či rozptyly dvou normálních rozložení na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů pořízených z těchto rozložení. Zpravidla konstruujeme intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot respektive hodnotíme shodu středních hodnot pomocí dvouvýběrového t-testu či dvouvýběrového z-testu a shodu rozptylů pomocí F-testu.

Rozložení statistik odvozených z výběrových průměrů a výběrových rozptylů

Máme dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a má rozsah $n_1 \geq 2$, druhý pochází z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ a má rozsah $n_2 \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry, S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a $S_*^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ vážený průměr výběrových rozptylů.

Pak platí:

a) Statistiky $M_1 - M_2$ a $S_*^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ jsou stochasticky nezávislé.

b) $U = \frac{M_1 - M_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$. (Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.)

c) Necht' $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $K = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$. (Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o neznámém rozptylu σ^2 .)

d) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $T = \frac{M_1 - M_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$. (Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2

neznáme, ale víme, že jsou shodné.)

e) $F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$. (Pivotová statistika F slouží k řešení úloh o σ_1^2 / σ_2^2 .)

Vysvětlení:

ad b) $M_1 - M_2$ je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry

$$E(M_1 - M_2) = \mu_1 - \mu_2,$$

$$D(M_1 - M_2) = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2.$$

U se získá standardizací $M_1 - M_2$.

ad c) $K_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$ a $K_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy $K = K_1 + K_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.

ad d) $U = \frac{M_1 - M_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$, $K = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ jsou stochasticky nezávislé, protože $M_1 -$

M_2 a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé. $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n_1 + n_2 - 2}}} = \frac{M_1 - M_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

ad e) $K_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$ a $K_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy

$$F = \frac{\frac{K_1}{n_1 - 1}}{\frac{K_2}{n_2 - 1}} = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Příklad: Necht' jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení $N(0,28; 0,09)$ a má rozsah 16, druhý pochází z rozložení $N(0,25; 0,04)$ a má rozsah 25. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude větší než výběrový průměr 2. výběru?

Řešení:

$$\begin{aligned}
 P(M_1 > M_2) &= P(M_1 - M_2 > 0) = 1 - P(M_1 - M_2 \leq 0) = 1 - P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) \\
 &= 1 - P\left(U \leq \frac{-0,28 + 0,25}{\sqrt{\frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25}}}\right) = 1 - P(U \leq -0,35294) = 1 - \Phi(-0,35) = \Phi(0,35) = 0,63683
 \end{aligned}$$

S pravděpodobností přibližně 63,7% je výběrový průměr 1. výběru větší než výběrový průměr 2. výběru.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistika $M_1 - M_2$ se podle bodu (a) řídí rozložením $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$,

kde $\mu_1 - \mu_2 = 0,28 - 0,25 = 0,03$, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25} = 0,007225$, tj. statistika $M_1 - M_2 \sim N(0,03; 0,007225)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případě. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme = 1-INormal(0;0,03;sqrt(0,007225)).

V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,637934.

Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 / σ_2^2

Uvedeme přehled vzorců pro meze 100(1- α)% empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 / σ_2^2 .

a) Interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 , σ_2^2 známe (využití pivotové statistiky U)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = (m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha/2}, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha/2})$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = (m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha}, \infty)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = (-\infty, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha})$$

b) Interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 , σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití pivotové statistiky T)

Oboustranný:

$$(d, h) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2), m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2))$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2), \infty)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = (-\infty, m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2))$$

c) Interval spolehlivosti pro společný neznámý rozptyl σ^2 (využití pivotové statistiky K)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)}, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$$

d) Interval spolehlivosti pro podíl rozptylů $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (využití pivotové statistiky F)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

Upozornění: Není-li v bodě (b) splněn předpoklad o shodě rozptylů, lze sestavit aspoň přibližný $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$.

V tomto případě má statistika T přibližně rozložení $t(\nu)$, kde počet stupňů volnosti $\nu = \frac{\frac{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2}{\frac{s_1^2 / n_1}{n_1} + \frac{s_2^2 / n_2}{n_2}}}{2}$. Není-li v celé

číslo, použijeme v tabulkách kvantilů Studentova rozložení lineární interpolaci.

Příklad: Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru (v g/l). Z první nádrže bylo odebráno 25 vzorků, z druhé nádrže 10 vzorků. Byly vypočteny realizace výběrových průměrů a rozptylů: $m_1 = 34,48$, $m_2 = 35,59$, $s_1^2 = 1,7482$, $s_2^2 = 1,7121$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$.

Řešení:

Úloha vede na vzorec z bodu (b). Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů a najdeme odpovídající kvantily Studentova rozložení:

$$s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{24 \cdot 1,7482 + 9 \cdot 1,7121}{33} = 1,7384, \quad t_{0,975}(33) = 2,035$$

Dosadíme do vzorců pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti:

$$\begin{aligned} d &= m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = \\ &= 34,48 - 35,59 - \sqrt{1,7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2,035 = -2,114 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = \\ &= 34,48 - 35,59 + \sqrt{1,7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2,035 = -0,106 \end{aligned}$$

$-2,114 \text{ g/l} < \mu_1 - \mu_2 < -0,106 \text{ g/l}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případě.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

$$=34,48-35,59-\text{sqrt}((24*1,7482+9*1,7121)/33)*\text{sqrt}((1/25)+(1/10))*\text{VStudent}(0,975;33)$$

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

$$=34,48-35,59+$$

$$\text{sqrt}((24*1,7482+9*1,7121)/33)*\text{sqrt}((1/25)+(1/10))*\text{VStudent}(0,975;33)$$

	1	2
	d	h
1	-2,11368	-0,10632

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy $-2,114 \text{ g/l} < \mu_1 - \mu_2 < -0,106 \text{ g/l}$.

Příklad: V předešlém příkladě nyní předpokládáme, že dané dva náhodné výběry pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.

Řešení:

Úloha vede na vzorec z bodu (d).

$$d = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{F_{0,975}(24,9)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{3,6142} = 0,28$$

$$h = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{F_{0,025}(24,9)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{1 / F_{0,975}(9,24)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{1 / 2,7027} = 2,76$$

$$0,28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2,76 \text{ s pravděpodobností aspoň } 0,95.$$

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případě.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

$$=(1,7482/1,7121)/VF(0,975;24;9)$$

(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-quantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

$$=(1,7482/1,7121)/VF(0,025;24;9)$$

	1	2
d	0,282521	2,759698

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí: $0,28 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 2,76$.

Jednotlivé typy testů o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 / σ_2^2

a) Necht' X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2 , σ_2^2 známe. Necht' c je konstanta.

Test $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá **dvouvýběrový z-test**.

b) Necht' X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Necht' c je konstanta.

Test $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá **dvouvýběrový t-test**.

c) Necht' X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Test $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ se nazývá **F-test**.

Provedení testů o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ pomocí kritického oboru

a) Provedení dvouvýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Stanovíme kritický obor W .

Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle -\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$.

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle -\infty, -u_{1-\alpha} \rangle$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle$.

b) Provedení dvouvýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$.

Stanovíme kritický obor W .

Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2} \right) \cup \left(t_{1-\alpha/2}, \infty \right).$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha} \right)$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(t_{1-\alpha}, \infty \right)$.

c) Provedení F-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$.

Stanovíme kritický obor W .

Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Kritický obor má tvar:

$$W = \left(0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right) \cup \left(F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right).$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left(0, F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right)$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left(F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right)$.

Příklad: V restauraci "U bílého koníčka" měřili ve 20 případech čas obsluhy zákazníka. Výsledky v minutách: 6, 8, 11, 4, 7, 6, 10, 6, 9, 8, 5, 12, 13, 10, 9, 8, 7, 11, 10, 5. V restauraci "Zlatý lev" bylo dané pozorování uskutečněno v 15 případech s těmito výsledky: 9, 11, 10, 7, 6, 4, 8, 13, 5, 15, 8, 5, 6, 8, 7. Za předpokladu, že uvedené hodnoty pocházejí ze dvou normálních rozložení, na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnoty doby obsluhy jsou v obou restauracích stejné.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Je to úloha na dvouvýběrový t-test. Před provedením tohoto testu je však nutné pomocí F-testu ověřit shodu rozptylů. Na hladině významnosti 0,05 tedy testujeme $H_0:$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ proti } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1. \text{ Nejprve vypočteme } m_1 = 8,25, m_2 = 8,13, s_1^2 = 6,307, s_2^2 = 9,41,$$

$$s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{19 \cdot 6,307 + 14 \cdot 9,41}{33} = 7,623. \text{ Podle vzorce z bodu (c) vypočteme realizaci testové statistiky:}$$

$$t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6,307}{9,41} = 0,6702. \text{ Stanovíme kritický obor:}$$

$$W = (0, F_{\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1}) \cup (F_{1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1}, \infty) = (0, F_{0,025, 19, 14}) \cup (F_{0,975, 19, 14}, \infty) = \\ = (0, 1 / F_{0,975, 14, 19}) \cup (F_{0,975, 19, 14}, \infty) = (0, 1 / 2,6469) \cup (2,8607, \infty) = (0; 0,3778) \cup (2,8607, \infty)$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Rozptyly tedy můžeme považovat za shodné.

Nyní se vrátíme k dvouvýběrovému t-testu. Podle vzorce z bodu (b) vypočteme realizaci testové statistiky:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{8,25 - 8,13}{\sqrt{7,623} \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}}} = 0,124.$$

Stanovíme kritický obor:

$$W = (-\infty, -t_{1 - \alpha/2, n_1 + n_2 - 2}) \cup (t_{1 - \alpha/2, n_1 + n_2 - 2}, \infty) = (-\infty, -t_{0,975, 33}) \cup (t_{0,975, 33}, \infty) = \\ = (-\infty, -2,035) \cup (2,035, \infty)$$

Protože testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 35 případech. První proměnnou nazveme OBSLUHA, druhou ID. Do proměnné OBSLUHA napíšeme nejprve doby obsluhy v první restauraci a poté doby obsluhy ve druhé restauraci. Do proměnné ID, která slouží k rozlišení první a druhé restaurace, napíšeme 20 krát jedničku a 15 krát dvojku.

Provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů: Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné – Závislé proměnné OBSLUHA, Grupovací proměnná ID – OK.

Po kliknutí na tlačítko Souhrn dostaneme tabulku

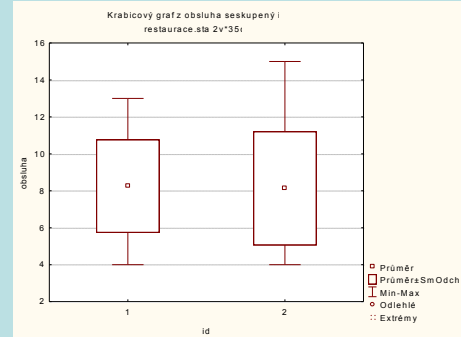
Proměnná	t-testy; grupováno: ID (restaurace)										
	Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr rozptyly	p rozptyly
OBSLUHA	8,250000	8,133333	0,123730	33	0,902279	20	15	2,510504	3,067495	1,492952	0,410440

Vidíme, že testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,492952 (je to převrácená hodnota k číslu 0,6702, které jsme vypočítali při ručním postupu), odpovídající p-hodnota je 0,41044, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů.

(Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)

Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 0,12373, počet stupňů volnosti je 33, odpovídající p-hodnota 0,902279, tedy hypotézu o shodě středních hodnot nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neprokázal rozdíl ve středních hodnotách dob obsluhy v restauracích "U bílého koníčka" a „Zlatý lev“.

Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.



Z grafu je vidět, že průměrná doba obsluhy v první restauraci je nepatrně delší a má menší variabilitu než ve druhé restauraci. Extrémní ani odlehlejší hodnoty se zde nevyskytují.

Cohenův koeficient věcného účinku – doplnění významu dvouvýběrového t-testu:

Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Označme m_1, m_2 realizace výběrových průměrů hodnot dané veličiny v těchto dvou skupinách,

s_1^2, s_2^2 realizace výběrových rozptylů a $s_*^2 = \frac{n_1 - 1 \cdot s_1^2 + n_2 - 1 \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ realizaci váženého průměru výběrových rozptylů.

Cohenův koeficient d vypočteme podle vzorce: $d = \frac{|m_1 - m_2|}{s_*}$.

Tento koeficient slouží k posouzení velikosti rozdílu průměrů, který je standardizován pomocí odmocniny z váženého průměru výběrových rozptylů. Jedná se o tzv. **věcnou významnost** neboli **velikost účinku** skupiny na variabilitu hodnot sledované náhodné veličiny. Velikost účinku hodnotíme podle následující tabulky:

Hodnota d	účinek
aspoň 0,8	velký
mezi 0,5 až 0,8	střední
mezi 0,2 až 0,5	malý
pod 0,2	zanedbatelný

(Uvedené hodnoty nemají samozřejmě absolutní platnost, posouzení, jaký účinek považujeme za velký či malý, závisí na kontextu.)

Je zapotřebí si uvědomit, že při dostatečně velkých rozsazích náhodných výběrů i malý rozdíl ve výběrových průměrech způsobí zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α , i když z věcného hlediska tak malý rozdíl nemá význam. Naopak, máme-li výběry malých rozsahů, pak i značně velký rozdíl ve výběrových průměrech nemusí vést k zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α .

Příklad:

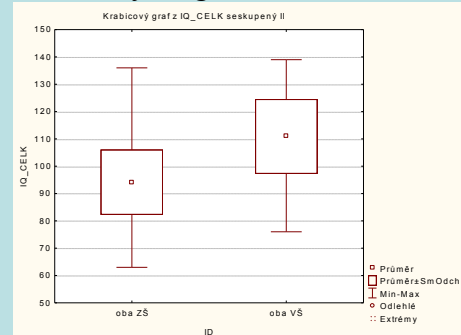
Máme k dispozici údaje o celkovém IQ 856 žáků ZŠ. Zajímáme se jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají pouze základní vzdělání (je jich 296) a jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají vysokoškolské vzdělání (těch je 75). Na hladině významnosti 0,05 budeme testovat hypotézu, že střední hodnota celkového IQ je v obou skupinách stejná a také vypočteme Cohenův koeficient věcného účinku.

Řešení: Provedeme dvouvýběrový t-test:

Proměnná	t-testy; grupováno: ZŠ a VŠ (IQ)										
	Průměr oba ZŠ	Průměr oba VŠ	t	sv	p	Poč. plat oba ZŠ	Poč. plat oba VŠ	Sm. odch. oba ZŠ	Sm. odch. oba VŠ	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
IQ_CELK	94,13851	110,9067	-10,6295	369	0,000000	296	75	11,82604	13,60164	1,322829	0,110124

Hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože odpovídající p-hodnota je velmi blízká 0 (hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05, p-hodnota F-testu je 0,110124, což je větší než 0,05).

Krabicový diagram:



Vidíme, že průměrné celkové IQ dětí v 1. skupině je 94,1, zatímco ve 2. skupině 110,9. Vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ posoudíme pomocí Cohenova koeficientu.

	1	2	3	4	5	6	7
	n1	n2	m1	m2	s1	s2	d
1	296	75	94,13851	110,9067	11,82604	13,60164	1,374117

Cohenův koeficient nabývá hodnoty 1,37, tudíž vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ lze považovat za velký.

Příklad: Výrobce limonád chtěl zjistit, zda změna technologie výroby se projeví v prodeji limonád. Proto sledoval po 14 náhodně vybraných dnů před zavedením nových limonád tržby v určitém regionu a zjistil, že za den utržil v průměru 39 600 Kč se směrodatnou odchylkou 5 060 Kč. Po zavedení nových limonád prověřil stejným způsobem tržby v 11 náhodně vybraných dnech v témž regionu a zjistil průměrný příjem 41 200 Kč se směrodatnou odchylkou 4 310 Kč. Předpokládejte, že tržby za starý typ limonád se řídí rozložením $N(\mu_1, \sigma^2)$ a tržby za nový typ limonád se řídí rozložením $N(\mu_2, \sigma^2)$. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

Řešení:

Za odhad společného neznámého rozptylu vezmeme vážený průměr výběrových rozptylů:

$$s_*^2 = \frac{13 \cdot 5060^2 + 10 \cdot 4310^2}{23} = 22548165,217$$

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{39600 - 41200}{\sqrt{22548165,217} \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{11}}} = -1,8363$$

Kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) \cup \left(t_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \infty \right) = \left(-\infty, -t_{0,975} \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{11}} \right) \cup \left(t_{0,975} \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{11}}, \infty \right) = \left(-\infty, -2,0687 \right) \cup \left(2,0687, \infty \right)$$

Protože testové kritérium se nerealizuje v kritickém oboru, na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodě středních hodnot.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – do políčka Pr1 napíšeme 39600, do políčka SmOd1 napíšeme 5600, do políčka N1 napíšeme 14, do políčka Pr2 napíšeme 41200, do políčka SmOd2 napíšeme 4310, do políčka N2 napíšeme 14 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,4116 tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: pr6121' dialog box in STATISTICA. It is divided into three sections:

- Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty:** r1: 0,00, N1: 10, r2: 0,00, N2: 10, p: 1,0000. Radio buttons for 'Jednostr.' and 'Oboustr.' are present. A 'Výpočet' button is on the right.
- Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení):** Pr1: 39600, SmOd1: 5060, N1: 14, Pr2: 41200, SmOd2: 4310, N2: 11, p: .4116. Radio buttons for 'Jednostr.' and 'Oboustr.' are present. A 'Výpočet' button is on the right.
- Rozdíl mezi dvěma poměry:** P 1: .50000, N1: 10, P 2: .50000, N2: 10, p: 1,0000. Radio buttons for 'Jednostr.' and 'Oboustr.' are present. A 'Výpočet' button is on the right.

At the top, there is a checkbox 'Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu' and a 'Storno' button.

Jelikož p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že změna technologie výroby se neprojevila ve střední hodnotě tržeb.

Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z alternativního rozložení

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ . Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 - \vartheta & \text{pro } x = 0 \\ \vartheta & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{1-x} & \text{pro } x = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ . Píšeme $X \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = n\vartheta, \quad D(X) = n\vartheta(1 - \vartheta)$$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro $n = 1$.)

Jsou-li X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, \dots, n$, pak $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^n X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme

$\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^n X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru.

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$ a necht' je splněna podmínka $n\theta(1-\theta) > 0$. Pak statistika $U = \frac{M - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}$

konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \theta)$. Y_n

má střední hodnotu $E(Y_n) = n\theta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\theta(1-\theta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika

$U = \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením $N(0,1)$. Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n ,

dostaneme vyjádření: $U = \frac{\frac{Y_n - n\theta}{n}}{\sqrt{\frac{n\theta(1-\theta)}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} = \frac{M - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \approx N(0,1)$

Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr θ :

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr θ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D\left(\frac{\theta - M}{n}\right)$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením

$N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0: 1 - \alpha &\leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M - \theta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) \\ &= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \theta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2}\right) \end{aligned}$$

Příklad: Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich používá zubní kartáček zahraniční výroby. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba používá zubní kartáček zahraniční výroby.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{100} , přičemž $X_i = 1$, když i -tá osoba používá zahraniční zubní kartáček a $X_i = 0$ jinak,
 $i = 1, \dots, 100$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\theta(1-\theta) > 9$: parametr θ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem.

Pak $100 \cdot 0,34 \cdot 0,66 = 22,44 > 9$.

Dosadíme do vzorce: $d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$, tedy

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} 1,96 = 0,2472, \quad h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} 1,96 = 0,4328.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \theta < 0,4328$.

Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 0,95 tedy můžeme očekávat, že v populaci je 24,7% až 43,3% osob, které používají zubní kartáček zahraniční výroby.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

a) Přesný způsob

Otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými a jedním případu.

První proměnnou nazveme d a do jejího Dlouhého jména napíšeme

$$=0,34-\text{sqrt}(0,34*0,66/100)*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

Druhou proměnnou nazveme h a do jejího Dlouhého jména napíšeme

$$=0,34+\text{sqrt}(0,34*0,66/100)*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

Dostaneme výsledek:

	1	2
	d	h
1	0,247155	0,432845

Vidíme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2471 až 0,4328.

b) Přibližný způsob, použitelný pro dostatečně velký rozsah výběru

Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 100 případech uložíme 34 jedniček (indikují používání zubního kartáčku zahraniční výroby) a 66 nul (indikují používání zubního kartáčku domácí výroby).

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme

Meze spolehl. prům. – ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00 – Výpočet.

Dostaneme tabulku:

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka3)			
	N platných	Průměr	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. 95,000
X	100	0,340000	0,245532	0,434468

Dospěli jsme k výsledku, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2455 až 0,4345.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:

Šířka $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr θ :

$$h - d = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} - \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) = 2 \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby $h - d \leq \Delta$, tedy $2 \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \Delta$. Odtud vyjádříme $n \geq \frac{4m(1-m) u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m , aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. V tomto případě volíme relativní četnost $m = 0,5$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m(1-m) u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 751,67$$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

$$\text{ad b) } n \geq \frac{4m(1-m) u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 27060,25$$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost $m = 0,3$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m^2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 531,41$$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.

Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq \frac{4m^2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 22730,61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru θ

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$ a necht' je splněna podmínka $n\theta \rightarrow \infty$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

$H_0: \theta = c$ proti alternativě $H_1: \theta \neq c$ (resp. $H_1: \theta < c$ resp. $H_1: \theta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $N(0,1)$.

Kritický obor má tvar $w = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}] \cup [u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $w = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $w = [u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametru θ lze samozřejmě provést i pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0,01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti oboustranné alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{1000} , přičemž $X_i = 1$, když i -tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Známe: $n = 1000$, $m = \frac{16}{1000} = 0,016$, $c = 0,01$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 9,9 > 9$.

a) Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,016 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}}} = 1,907$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0,975}) \cup (u_{0,975}, \infty) = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$. Protože $1,907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2} = 0,016 - \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} \cdot 1,96 = 0,0082$

$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2} = 0,016 + \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} \cdot 1,96 = 0,0238$

Protože číslo $c = 0,01$ leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:

$p = 2 \min \{ \Phi(1,907), 1 - \Phi(1,907) \} = 2 \min \{ 0,97104, 1 - 0,97104 \} = 0,05792$.

Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka3' dialog box. It is divided into three sections for different types of tests. The 'Rozdíl mezi dvěma poměry' section is active, showing input values for P1 (0,01600), N1 (1000), P2 (0,01000), and N2 (32767), with a resulting p-value of 0,0626. The 'Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)' section shows input values for Pr1 (0), SmOd1 (1), N1 (10), Pr2 (0), SmOd2 (1), and N2 (10), with a resulting p-value of 1,0000. The 'Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty' section shows input values for r1 (0,00), N1 (10), r2 (0,00), and N2 (10), with a resulting p-value of 1,0000. The 'Výpočet' button is highlighted in the active section.

Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu Storno

Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty

r1: 0,00 N1: 10 p: 1,0000 Jednostr. Výpočet
r2: 0,00 N2: 10 Oboustr.

Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)

Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10 p: 1,0000 Výpočet
Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10 Jednostr.
 Oboustr.

Výběrový průměr vs. střední hodnota

Rozdíl mezi dvěma poměry

P 1: 0,01600 N1: 1000 p: 0,0626 Jednostr. Výpočet
P 2: 0,01000 N2: 32767 Oboustr.

Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{40} , přičemž
 $X_i = 1$, když terapie u i -tého pacienta byl úspěšná a
 $X_i = 0$ jinak,
 $i = 1, \dots, 40$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(9)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \theta \leq 0,5$ proti pravostranné alternativě $H_1: \theta > 0,5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

Ověření podmínky $n\theta(1-\theta) > 9$: $40 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 9,6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,6 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}} = 1,2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle = \langle u_{0,95}, \infty \rangle = \langle 1,645, \infty \rangle$.

Protože $1,2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka9' dialog box in STATISTICA. It is divided into three sections for different types of tests. Each section has input fields for parameters and a 'Výpočet' (Calculate) button.

- Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty:** r1: 0,00, N1: 10, r2: 0,00, N2: 10, p: 1,0000. Radio buttons for 'Jednostr.' (unselected) and 'Oboustr.' (selected). A 'Storno' button is also present.
- Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení):** Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10, Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10, p: 1,0000. Radio buttons for 'Jednostr.' (unselected) and 'Oboustr.' (selected). A checkbox 'Výběrový průměr vs. střední hodnota' is unselected.
- Rozdíl mezi dvěma poměry:** P 1: ,60000, N1: 40, P 2: ,50000, N2: 32767, p: ,1031. Radio buttons for 'Jednostr.' (selected) and 'Oboustr.' (unselected).

Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.