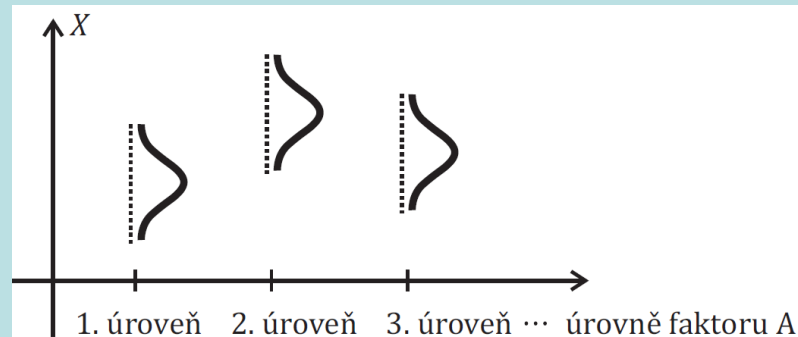


## Analýza rozptylu jednoduchého třídění

**Motivace:** Zajímáme se o problém, zda lze určitým faktorem (tj. nominální náhodnou veličinou A) vysvětlit variabilitu pozorovaných hodnot náhodné veličiny X, která je intervalového či poměrového typu. Např. zkoumáme, zda metoda výuky určitého předmětu (faktor A) ovlivňuje počet bodů dosažených studenty v závěrečném testu (náhodná veličina X). Předpokládáme, že faktor A má  $r \geq 3$  úrovní a přitom  $i$ -té úrovni odpovídá  $n_i$  pozorování  $x_{i1}, \dots, x_{in_i}$ , které tvoří náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_i, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, r$  a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé, tedy  $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ , kde  $\varepsilon_{ij}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením  $N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, n_i$ . Výsledky lze zapsat do tabulky

faktor A	výsledky
úroveň 1	$X_{11}, \dots, X_{1n_1}$
úroveň 2	$X_{21}, \dots, X_{2n_2}$
...	...
úroveň r	$X_{r1}, \dots, X_{rn_r}$

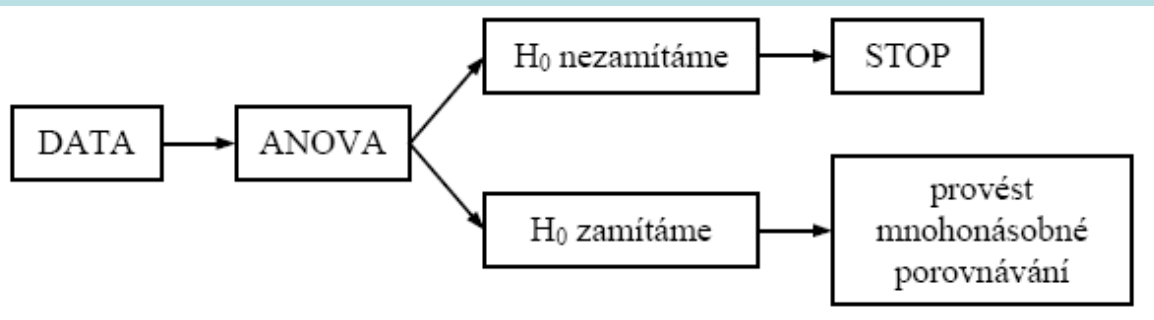
Ilustrace:



Na hladině významnosti  $\alpha$  testujeme nulovou hypotézu, která tvrdí, že všechny střední hodnoty jsou stejné, tj.  $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_r$  proti alternativní hypotéze  $H_1$ , která tvrdí, že aspoň jedna dvojice středních hodnot se liší.

Jedná se tedy o zobecnění dvouvýběrového t-testu a na první pohled se zdá, že stačí utvořit  $\binom{r}{2}$  dvojic náhodných výběrů a na každou dvojici aplikovat dvouvýběrový t-test. Hypotézu o shodě všech středních hodnot bychom pak zamítli, pokud aspoň v jednom případě z  $\binom{r}{2}$  porovnávání se prokáže odlišnost středních hodnot. Odtud je vidět, že k neoprávněnému zamítnutí nulové hypotézy (tj. k chybě 1. druhu) může dojít s pravděpodobností větší než  $\alpha$ . Proto ve 30. letech 20. století vytvořil R. A. Fisher metodu ANOVA (analýza rozptylu, v popsané situaci konkrétně analýza rozptylu jednoduchého třídění), která uvedenou podmínku splňuje.

Pokud na hladině významnosti  $\alpha$  zamítneme nulovou hypotézu, zajímá nás, které dvojice středních hodnot se od sebe liší. K řešení tohoto problému slouží metody mnohonásobného porovnávání, např. Scheffého nebo Tukeyova metoda.



## Označení:

V analýze rozptylu jednoduchého třídění se používá tzv. tečková notace.

$n = \sum_{i=1}^r n_i$  ... celkový rozsah všech  $r$  výběrů

$X_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$  ... součet hodnot v  $i$ -tém výběru

$M_i = \frac{1}{n_i} X_i$  ... výběrový průměr v  $i$ -tém výběru

$X_{..} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$  ... součet hodnot všech výběrů

$M_{..} = \frac{1}{n} X_{..}$  ... celkový průměr všech  $r$  výběrů

Zavedeme součty čtverců

$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{m}_{..})^2 \dots$  **celkový součet čtverců** (charakterizuje variabilitu jednotlivých pozorování kolem celkového průměru),

počet stupňů volnosti  $f_T = n - 1$ ,

$S_A = \sum_{i=1}^r n_i (\bar{m}_{i.} - \bar{m}_{..})^2 \dots$  **skupinový součet čtverců** (charakterizuje variabilitu mezi jednotlivými náhodnými výběry),

počet stupňů volnosti  $f_A = r - 1$ .

Sčítanec  $(\bar{m}_{i.} - \bar{m}_{..})$  představuje bodový odhad efektu  $\alpha_i$ .

$S_E = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{m}_{i.})^2 \dots$  **reziduální součet čtverců** (charakterizuje variabilitu uvnitř jednotlivých výběrů),

počet stupňů volnosti  $f_E = n - r$ .

Lze dokázat, že  $S_T = S_A + S_E$ .

(Důkaz je proveden např. ve skriptech Budíková, Mikoláš, Osecký: Popisná statistika v poznámce 5.20.)

## Testování hypotézy o shodě středních hodnot

Náhodné veličiny  $X_{ij}$  se řídí modelem

$$M_0: X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

pro  $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, n_i$ , přičemž

$\varepsilon_{ij}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením  $N(0, \sigma^2)$ ,

$\mu$  je společná část střední hodnoty závisle proměnné veličiny,

$\alpha_i$  je efekt faktoru A na úrovni  $i$ .

Parametry  $\mu, \alpha_i$  neznáme.

Požadujeme, aby platila tzv. **reparametrizační rovnice**:  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$ .

(Pokud je třídění vyvážené, tj. pokud mají všechny výběry stejný rozsah:  $n_1 = n_2 = \dots = n_r$ , pak lze použít zjednodušenou podmínku  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$ .)

Kdyby nezáleželo na faktoru A, platila by hypotéza  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$  a dostali bychom model

**M1:**  $X_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ .

Během analýzy rozptylu tedy zkoumáme, zda výběrové průměry  $M_1, \dots, M_r$  se od sebe liší pouze v mezích náhodného kolísání kolem celkového průměru M nebo zda se projevuje vliv faktoru A.

Rozdíl mezi modely M0 a M1 ověřujeme pomocí testové statistiky

$F_A = \frac{S_A / f_A}{S_E / f_E}$ , která se řídí rozložením  $F(r-1, n-r)$ , je-li model M1 správný. Hypotézu o nevýznamnosti faktoru A tedy zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když platí:  $F_A \geq F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$ .

Výsledky výpočtů zapisujeme do **tabulky analýzy rozptylu jednoduchého třídění**.

Zdroj variability	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	$F_A$
skupiny	$S_A$	$f_A = r - 1$	$S_A/f_A$	$\frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
reziduální	$S_E$	$f_E = n - r$	$S_E/f_E$	-
celkový	$S_T$	$f_T = n - 1$	-	-

Sílu závislosti náhodné veličiny X na faktoru A můžeme měřit pomocí **poměru determinace**:  $P^2 = \frac{S_A}{S_T}$ . Nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ .

## Testování hypotézy o shodě rozptylů

Před provedením analýzy rozptylu je zapotřebí ověřit předpoklad o shodě rozptylů v daných  $r$  výběrech.

a) **Levenův test:** Položme  $z_{ij} = |X_{ij} - M_i|$ . Označíme

$$M_{Zi} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij},$$

$$M_Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij},$$

$$S_{ZE} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - M_{Zi})^2,$$

$$S_{ZA} = \sum_{i=1}^r n_i (M_{Zi} - M_Z)^2$$

Platí-li hypotéza o shodě rozptylů, pak statistika

$$F_{ZA} = \frac{S_{ZA} / (r-1)}{S_{ZE} / (n-r)} \approx F(r-1, n-r).$$

Hypotézu o shodě rozptylů tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $F_{ZA} \geq F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$ .

(Levenův test je vlastně založen na analýze rozptylu absolutních hodnot centrovaných pozorování. Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny  $X_{ij} - M_i$  nejsou stochasticky nezávislé a absolutní hodnoty těchto veličin nemají normální rozložení, je Levenův test pouze aproximativní.)

b) **Brownův – Forsytheův test** je modifikací Levenova testu. Modifikace spočívá v tom, že místo výběrového průměru  $i$ -tého výběru se při výpočtu veličiny  $z_{ij}$  používá medián  $i$ -tého výběru.

c) **Bartlettův test**: Platí-li hypotéza o shodě rozptylů a rozsahy všech výběrů jsou větší než 6, pak statistika

$$B = \frac{1}{C} \left[ (n-r) \ln S_*^2 - \sum_{i=1}^r (n_i - 1) \ln S_i^2 \right]$$

se asymptoticky řídí rozložením  $\chi^2_{r-1}$ . Přitom konstanta  $C = 1 + \frac{1}{3(r-1)} \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-r} \right)$  a

$S_*^2$  je vážený průměr výběrových rozptylů.

$H_0$  zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $B$  se realizuje v kritickém oboru  $w = \left( \chi^2_{r-1, 1-\alpha}, \infty \right)$ .

**Poznámka k testům homogenity rozptylů:** Ze simulačních studií vyplývá, že pravděpodobnost chyby 1. druhu (tj. pravděpodobnost neoprávněného zamítnutí pravdivé nulové hypotézy) je u Bartlettova testu blízká obvykle volené hladině významnosti 0,05 pouze pro výběry z normálního rozložení. Pro větší počty výběrů z výrazně nenormálních rozložení (např. výběry z exponenciálního rozložení) výrazně stoupá pravděpodobnost chyby 1. druhu. Naopak Brownův – Forsytheův test udrží nízkou pravděpodobnost chyby 1. druhu i pro velký počet výběrů pocházejících z nenormálních rozložení.



## Post – hoc metody mnohonásobného porovnávání

Zamítne-li na hladině významnosti  $\alpha$  hypotézu o shodě středních hodnot, chceme zjistit, které dvojice středních hodnot se liší na dané hladině významnosti  $\alpha$ , tj. na hladině významnosti  $\alpha$  testujeme  $H_0: \mu_l = \mu_k$  proti  $H_1: \mu_l \neq \mu_k$  pro všechna  $l, k = 1, \dots, r, l \neq k$ .

a) Mají-li všechny výběry též rozsah  $p$  (říkáme, že třídění je vyvážené), použijeme **Tukeyovu metodu**.

Testová statistika má tvar  $\frac{|M_k - M_l|}{\frac{S_*}{\sqrt{p}}}$ . Rovnost středních hodnot  $\mu_k$  a  $\mu_l$  zamítne na hladině významnosti  $\alpha$ , když

$\frac{|M_k - M_l|}{\frac{S_*}{\sqrt{p}}} \geq q_{1-\alpha/2}(r, n-p)$ , kde hodnoty  $q_{1-\alpha/2}(r, n-p)$  jsou kvantily studentizovaného rozpětí a najdeme je ve statistických ta-

bulkách. (Studentizované rozpětí je náhodná veličina  $Q = \frac{X_{(r)} - X_{(1)}}{s}$ .)

Existuje modifikace Tukeyovy metody pro nestejně rozsahy výběrů, nazývá se Tukeyova HSD metoda. V tomto případě má

testová statistika tvar  $\frac{|M_k - M_l|}{S_* \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l} \right)}}$ . Rovnost středních hodnot  $\mu_k$  a  $\mu_l$  zamítne na hladině významnosti  $\alpha$ , když

$\frac{|M_k - M_l|}{S_* \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l} \right)}} \geq q_{1-\alpha/2}(r, n-p)$ .

b) Nemají-li všechny výběry stejný rozsah, použijeme **Scheffého metodu**: rovnost středních hodnot  $\mu_k$  a  $\mu_l$  zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když

$$|M_k - M_l| \geq S_* \sqrt{\left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l} \right) F_{1-\alpha, n-r, n-r}}$$

Výhodou Scheffého testu je, že k jeho provedení nepotřebujeme speciální statistické tabulky s hodnotami kvantilů studentizovaného rozpětí, ale stačí běžné statistické tabulky s kvantily Fisherova – Snedecorova rozložení.

V případě vyváženého třídění, kdy lze aplikovat Tukeyovu i Scheffého metodu, použijeme tu, která je citlivější. Tukeyova metoda tedy bude výhodnější, když

$$q_{1-\alpha}^2(r, n-r) < 2(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, n-r).$$

Metody mnohonásobného porovnávání mají obecně menší sílu než ANOVA.

Může nastat situace, kdy při zamítnutí  $H_0$  nenajdeme metodami mnohonásobného porovnávání významný rozdíl u žádné dvojice středních hodnot. K tomu dochází zvláště tehdy, když p-hodnota pro ANOVU je jen o málo nižší než zvolená hladina významnosti. Pak slabší test patřící do skupiny metod mnohonásobného porovnávání nemusí odhalit žádný rozdíl.

## Doporučený postup při provádění analýzy rozptylu:

- a) Ověření normality daných  $n$  náhodných výběrů (grafické metody - NP plot, Q-Q plot, histogram, testy hypotéz o normálním rozložení - Lilieforsova varianta Kolmogorovova – Smirnovova testu nebo Shapirov – Wilkov test).  
Doporučuje se kombinace obou způsobů. Závěry učiníme až na základě posouzení obou výsledků.  
Obecně lze říci, že analýza rozptylu není příliš citlivá na porušení předpokladu normality, zvláště při větších rozsazích výběrů (nad 20), což je důsledek působení centrální limitní věty. Mírné porušení normality tedy není na závadu, při větším porušení použijeme např. Kruskalův – Wallisův test jako neparametrickou obdobu analýzy rozptylu jednoduchého třídění.
- b) Po ověření normality se testuje homogenitu rozptylů, tj. předpoklad, že všechny náhodné výběry pocházejí z normálních rozložení s tímž rozplyem. Graficky ověřujeme shodu rozptylů pomocí krabicových diagramů, kdy sledujeme, zda je šířka krabic stejná. Numericky testujeme homogenitu rozptylů pomocí Levenova testu, Brownova – Forsytheova testu (oba jsou implementovány ve STATISTICE, Brownův – Forsytheův test v MINITABu) či Bartlettova testu (je k dispozici v MINITABu).  
Slabé porušení homogenity rozptylů nevedí, při větším se doporučuje mediánový test.
- c) Pokud jsou splněny předpoklady normality a homogenity rozptylů, můžeme přistoupit k testování shody středních hodnot. Předtím je samozřejmě vhodné vypočítat průměry a směrodatné odchylky či rozptyly v jednotlivých skupinách.
- d) Dojde-li na zvolené hladině významnosti k zamítnutí hypotézy o shodě středních hodnot, zajímá nás, které dvojice středních hodnot se od sebe liší. K řešení tohoto problému slouží post-hoc metody mnohonásobného porovnávání, např. Scheffého nebo Tukeyova metoda.

**Příklad:** U čtyř odrůd brambor (označených symboly A, B, C, D) se zjišťovala celková hmotnost brambor vyrostlých vždy z jednoho trsu. Výsledky (v kg):

odrůda	hmotnost
A	0,9 0,8 0,6 0,9
B	1,3 1,0 1,3
C	1,3 1,5 1,6 1,1 1,5
D	1,1 1,2 1,0

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnota hmotnosti trsu brambor nezávisí na odrůdě. Zamítnete-li nulovou hypotézu, zjistěte, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05.

## Řešení:

Data považujeme za realizace čtyř nezávislých náhodných výběrů ze čtyř normálních rozložení se stejným rozptylem. Testujeme hypotézu, že všechny čtyři střední hodnoty jsou stejné.

Vypočítáme **výběrové průměry v jednotlivých výběrech**:  $M_1 = 0,8$ ,  $M_2 = 1,2$ ,  $M_3 = 1,4$ ,  $M_4 = 1,1$ ,

**celkový průměr**:  $M_{..} = 1,14$ ,

**výběrové rozptyly**:  $S_1^2 = 0,02$ ,  $S_2^2 = 0,03$ ,  $S_3^2 = 0,04$ ,  $S_4^2 = 0,01$ ,

**vážený průměr výběrových rozptylů**:  $S_*^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 n_i \cdot \bar{s}_i^2}{n} = \frac{3 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,04 + 2 \cdot 0,01}{11} = \frac{3}{110} = 0,027$ ,

**reziduální součet čtverců**:  $S_E = \sum_{i=1}^4 n_i \cdot \bar{s}_i^2 - S_*^2 = 11 \cdot \frac{3}{110} = 0,3$ ,

**skupinový součet čtverců**:  $S_A = \sum_{i=1}^4 n_i \cdot (M_i - M_{..})^2 = 4 \cdot (0,8 - 1,14)^2 + 3 \cdot (1,2 - 1,14)^2 + 5 \cdot (1,4 - 1,14)^2 + 3 \cdot (1,1 - 1,14)^2 = 0,816$

**celkový součet čtverců**:  $S_T = S_A + S_E = 0,816 + 0,3 = 1,116$ ,

**testová statistika**  $F_A = \frac{S_A / f_A}{S_E / f_E} = \frac{0,816 / 3}{0,3 / 11} = 9,97$ ,

Kritický obor  $W = \langle F_{0,95}^{3,11}, \infty \rangle = \langle 3,59, \infty \rangle$ . Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Vypočteme **poměr determinace**:  $P^2 = \frac{S_A}{S_T} = \frac{0,816}{1,116} = 0,7312$

Výsledky zapíšeme do tabulky ANOVA:

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	podíl	$F_A$
skupiny	$S_A = 0,816$	3	$S_A/3 = 0,272$	$\frac{S_A/3}{S_E/11} = 9,97$
reziduální	$S_E = 0,3$	11	$S_E/11 = 0,02727$	-
celkový	$S_T = 1,116$	14	-	-

Nyní pomocí Scheffého metody zjistíme, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05.

Srovnávané odrůdy	Rozdíly $ M_k - M_l $	Pravá strana vzorce
A, B	0,4	0,41
A, C	0,67	0,36
A, D	0,3	0,41
B, C	0,2	0,40
B, D	0,1	0,44
C, D	0,3	0,40

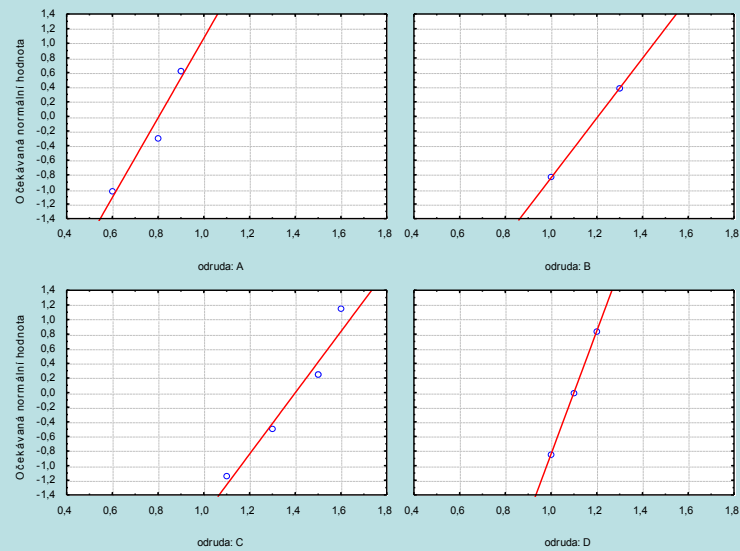
Na hladině významnosti 0,05 se liší odrůdy A a C.

## Řešení pomocí systému STATISTICA

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných X a odrůda a 15 případech. Do proměnné X zapíšeme zjištěné hmotnosti, do proměnné odrůda kódy pro dané odrůdy (1 pro A, 2 pro B, 3 pro C a 4 pro D).

	1 X	2 odrůda
1	0,9	A
2	0,8	A
3	0,6	A
4	0,9	A
5	1,3	B
6	1	B
7	1,3	B
8	1,3	C
9	1,5	C
10	1,6	C
11	1,1	C
12	1,5	C
13	1,1	D
14	1,2	D
15	1	D

Ověříme normalitu daných čtyř náhodných výběrů pomocí N-P plotu:



Odchyly od normality jsou jen nepatrné.



Vypočteme výběrové průměry a výběrové rozptyly:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Rozklad & jednofakt. ANOVA – OK – Proměnné – Závislé – X, Grupovací - odrůda – OK – Skupiny tabulek - zaškrtneme Rozptyly - Výpočet.

Rozkladová tabulka popisných statistik (příklad8301)				
N=15 (V seznamu záv. prom. nejsou ChD)				
odrůda	X průměr	X N	X Sm.odch.	X Rozptyl
A	0,800000	4	0,141421	0,020000
B	1,200000	3	0,173205	0,030000
C	1,400000	5	0,200000	0,040000
D	1,100000	3	0,100000	0,010000
Vš. skup.	1,140000	15	0,282337	0,079714

Nyní ověříme předpoklad shody rozptylů.

Na záložce Skupiny tabulek zaškrtneme Levenův test – Výpočet.

Levenův test homogenity rozptylů (příklad8301)								
Označ. efekty jsou význ. na hlad. $p < ,05000$								
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,018667	3	0,006222	0,065333	11	0,005939	1,047619	0,410027

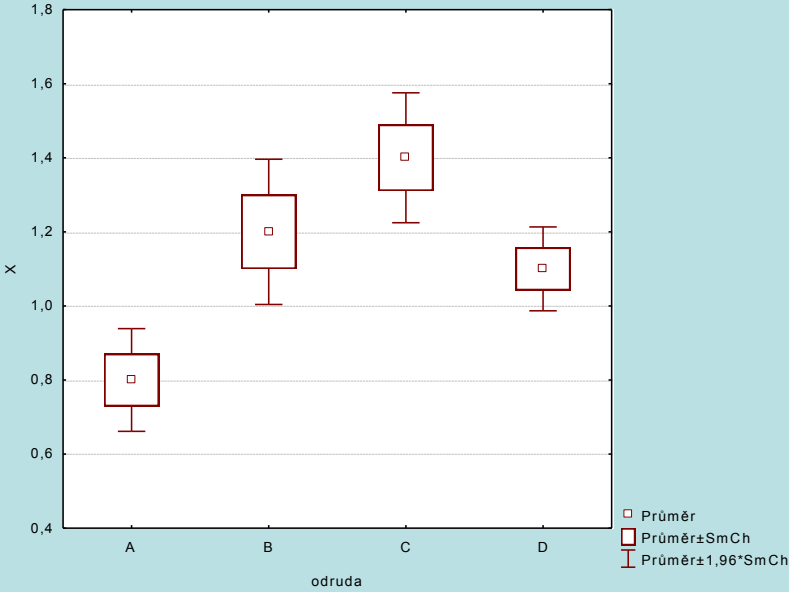
Vidíme, že p-hodnota Levenova testu je 0,41, tedy větší než hladina významnosti 0,05. Hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Přistoupíme k testu hypotézy o shodě středních hodnot.  
 Na záložce Skupiny tabulek zaškrtneme Analýza rozptylu – Výpočet.

Analýza rozptylu (příklad8301)								
Označ. efekty jsou význ. na hlad. $p < ,05000$								
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,816000	3	0,272000	0,300000	11	0,027273	9,973333	0,001805

Jelikož  $p$ -hodnota = 0,001805 je menší než hladina významnosti 0,05, hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet doplníme krabicovými diagramy:



Nyní aplikujeme Scheffého metodu mnohonásobného porovnávání, abychom zjistili, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05. Na záložce Post – hoc zvolíme Scheffův test.

		Scheffeho test; proměn.:X (příklad8301)			
		Označ. rozdíly jsou významné na hlad. $p < ,05000$			
odruda		{1}	{2}	{3}	{4}
		M=,80000	M=1,2000	M=1,4000	M=1,1000
A	{1}		0,059165	0,001950	0,190463
B	{2}	0,059165		0,464537	0,905502
C	{3}	0,001950	0,464537		0,163499
D	{4}	0,190463	0,905502	0,163499	

Tabulka obsahuje p-hodnoty pro vzájemné porovnání středních hodnot hmotnosti všech čtyř odrůd. Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší odrůdy A, C.

## Význam předpokladů v analýze rozptylu

- a) **Nezávislost jednotlivých náhodných výběrů** – velmi důležitý předpoklad, musí být splněn, jinak dostaneme nesmyslné výsledky.
- b) **Normalita** – ANOVA není příliš citlivá na porušení normality, zvláště pokud mají všechny výběry rozsah nad 20 (důsledek centrální limitní věty). Při výraznějším porušení normality se doporučuje Kruskalův – Wallisův test.
- c) **Shoda rozptylů** – mírné porušení nevádí, při větším se doporučuje Kruskalův – Wallisův test. Test shody rozptylů má smysl provádět až po ověření předpokladu normality.