Drsná matematika I – 3. přednáška
Geometrie v rovině

Jan Slovák

Masarykova univerzita

3. 10. 2011

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Afinní rovina a vektorový prostor $\mathbb{R}^2$

Na konci minulé přednášky jsme intuitivně používali elementární pojmy z geometrie reálné roviny. Budeme teď podrobněji zkoumat jak se vypořádávat s potřebou popisovat „polohu v rovině", resp. dávat do souvislostí polohy různých bodů roviny.

Zkusme si množinu $A = \mathbb{R}^2$ představit z pohledu pozorovatele, který sedí v některém pevně zvoleném místě (můžeme mu říkat třeba bod $O = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$). Předpokládejme, že ji vnímá jako nekonečnou desku bez jakýchkoliv zvolených měřítek a popisů a ví, co to znamená posunout se v libovolném násobku nějakého směru. Takové rovině budeme říkat „afinní rovina".

Aby pozorovatel mohl vidět kolem sebe „dvojice reálných čísel“, musí si vybrat nějaký bod E_1, kterému řekne „bod $[1, 0]$“ a jiný bod E_2, kterému začne říkat „bod $[0, 1]$“.

Do všech ostatních se pak dostane tak, že poskočí „a–krát ve směru $[1, 0]$“, pak „b–krát ve směru $[0, 1]$“ a takovému bodu bude říkat „bod $[a, b]$“. Pokud to bude dělat obvyklým způsobem, nebude výsledek záviset na pořadí, tzn. může také napřed jít b–krát ve směru $[0, 1]$ a pak teprve v tom druhém.

To, co jsme popsali, se nazývá volba **(afinního) souřadného systému v rovině**, bod O je jeho **počátkem**, posunutí $E_1 - O$ ztotožňujeme s dvojicí $[1, 0]$, podobně u E_2 a obecně každý bod P roviny je ztotožněn s dvojicí čísel $[a, b] = P - O$.

Všimněme si, že zároveň volbou pevného počátku O jsou ztotožněny jednotlivé body P roviny se směry posuvu $v = P - O$ a že všechny takové posuvy umíme skládat (budeme říkat „sčítat“) a také jednotlivé směry násobit v poměru každého reálného čísla (budeme říkat „násobit skalárem“).

Přímky v rovině

Naše operace sčítání bodů v rovině a jejich násobení skaláry splňují hodně vlastností skalárů. Budeme místo o směrech posuvu mluvit o **vektorech** a od bodů je budeme rozlišovat tím, že budou dány dvojicemi souřadnic v kulatých závorkách místo hranatých.
Když se náš pozorovatel umí posouvat o libovolný násobek pevného vektoru, pak také ví, co je to **přímka**. Je to podmnožina $p \subset A$ v rovině taková, že existují bod O a vektor v takové, že

$$p = \{P \in A;\ P - O = t \cdot v,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Popišme si $P = P(t) \in p$ ve zvolených souřadnicích s volbou $v = (\alpha, \beta)$:

$$x(t) = x_0 + \alpha \cdot t, \quad y(t) = y_0 + \beta \cdot t.$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme (vyloučíme t z parametrického vyjádření pro x a y, když pro určitost předpokládáme, že třeba $\alpha \neq 0$)

$$-\beta x + \alpha y + (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0.$$

To je obecná rovnice přímky

$$ax + by = c,$$

se známým vztahem dvojice čísel (a, b) a vektoru $v = (\alpha, \beta)$

$$a\alpha + b\beta = 0.$$

Výraz nalevo v rovnici přímky můžeme vidět jako skalární funkci F závislou na bodech v rovině a s hodnotami v $\mathbb{R}$, samu rovnici pak jako požadavek na její hodnotu.
Vektor (a, b) je směrem, ve kterém F nejrychleji roste. Proto bude směr kolmý na (a, b) právě směrem, ve kterém zůstává naše funkce F konstantní. Hodnota c pak určuje, která z přímek se „zvoleným směrem" to bude.

Mějme dvě přímky p a q a ptejme se po jejich průniku $p \cap q$. Ten bude popsán jako bod, splňující obě rovnice přímek naráz. Pišme je takto

$$ax + by = r$$
$$cx + dy = s.$$

Opět můžeme levou stranu vnímat jako přiřazení, které každé dvojici souřadnic $[x(P), y(P)]$ bodů v rovině přiřadí vektor hodnot dvou skalárních funkcí F_1 a F_2.
Můžeme tedy naše rovnice napsat jako jediný vztah $F(v) = w$, kde F je přiřazení, které vektor v popisující polohu obecného bodu v rovině zobrazí na vektor zadaný levou stranou rovnic, a požadujeme, aby se toto zobrazení strefilo do předem zadaného vektoru $w = (r, s)$.

Přiřazení F, se kterým jsme pracovali při popisu průniku přímek, zjevně respektuje operace sčítání a násobení s vektory a skaláry:

$$F(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot F(v) + b \cdot F(w)$$

pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$. Říkáme, že F je **lineární zobrazení** z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, a píšeme $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Obdobně, v rovnici pro přímku šlo o lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a jeho předepsanou hodnotu c.

Stručně budeme zapisovat taková zobrazení pomocí **matic** a jejich násobení, které definujeme takto:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Podobně, můžeme místo vektoru v zprava násobit jinou maticí B stejného rozměru jako je A. Prostě aplikujeme předchozí formule po jednotlivých sloupcích matice B a obrdržíme jako výsledek opět matice.
Snadno ověříme tzv. asociativitu násobení:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Stejně snadno je vidět i distributivita $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, neplatí však komutativita a existují „dělitelé nuly“. Např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Body v rovině jsou tedy obecně vzory hodnot lineárních zobrazení F roviny do roviny, přímky jsou obecně vzory hodnot lineárních zobrazení z roviny do reálné přímky $\mathbb{R}$. Samozřejmě, ve zvláštních situacích tomu tak být nemusí. Tak třeba průnikem dvou stejných přímek je opět sama přímka (a vzorem vhodné hodnoty pro takové lineární zobrazení bude celá přímka), nulové zobrazení má za vzor nuly celou rovinu, průnik dvou rovnoběžných přímek je prázdný. Poznáme to pomocí vztahu

$$ad - bc = 0$$

tj. vyjádření, kdy jsou nalevo v rovnicích přímek stejné výrazy až na skalární násobek. V takovém případě buď nebude v průniku žádný bod (rovnoběžné různé přímky) nebo tam budou všechny body přímky (stejné přímky).

Výrazu $ad - bc = 0$ říkáme **determinant** matice A a píšeme pro něj $\det A = ad - bc$, případně

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Jestliže k výsledku lineárního zobrazení ještě dovolíme přičíst pevný vektor $T = (w, z)$, tj. naše zobrazení bude

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot v + T = \begin{pmatrix} ax + by + w \\ cx + dy + z \end{pmatrix},$$

máme popsána právě všechna tzv. **afinní zobrazení roviny** do sebe. Známými příklady jsou všechny afinní podobnosti. Lineární zobrazení pak odpovídají těm afinním zobrazením, které zachovávají pevný bod O.

Přidejme nyní schopnost našeho pozorovatele vidět vzdálenosti. Okamžitě pak můžeme definovat pojmy jako jsou úhel a otočení v rovině.
Jednoduše si to můžeme představit takto: rozhodne se o nějakých bodech E_1 a E_2, že jsou od něj ve vzdálenosti jedna, a zároveň si řekne, že jsou na sebe kolmé. Vzdálenosti ve směrech souřadných os pak jsou dány příslušným poměrem, obecně používá Euklidovu větu. Odtud vyjde známý vzorec pro velikost vektoru $v = (a, b)$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Jiný možný postup by byl, kdyby pozorovatel vyšel z pojmu vzdálenost (a věděl co znamená „kolmý“ třeba díky Euklidově větě), zvolil první z vektorů velikosti jedna, zvolil si orientaci (třeba proti směru hodinových ručiček) a vybral jednotkový kolmý směr (ten jednoznačně určí třeba z požadavku platnosti Euklidovy věty pomocí pravoúhlého trojúhelníku se stranami o velikostech 3, 4 a 5).

Úhel φ dvou vektorů v, w vyjadřujeme pomocí funkce $\cos\varphi$, která je dána hodnotou reálné první souřadnice jednotkového vektoru, jehož úhel s vektorem $(1, 0)$ je φ. Zjevně je pak druhá souřadnice takového vektoru dána reálnou hodnotou $0 \leq \sin\varphi \leq 1$ splňující $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$.
Obecně pak pro dva vektory v a w popisujeme jejich úhel pomocí souřadnic $v = (x(v), y(v))$, $w = (x(w), y(w))$ takto:

$$\cos\varphi = \frac{x(v) \cdot x(w) + y(v) \cdot y(w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Příkladem lineárního zobrazení, které zachovává velikosti, je rotace o předem daný úhel ψ. Je dána formulí s maticí R_ψ:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R_\psi \cdot v = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplikací na jednotkový vektor $(1, 0)$ dostáváme skutečně právě očekávaný výsledek $(\cos\psi, \sin\psi)$.

Rotaci kolem jiného bodu $P = O + w$, snadno napíšeme formulí s pomocí translací:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= v \mapsto v - w \mapsto R_\psi \cdot (v - w) \\ &\mapsto R_\psi \cdot (v - w) + w \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi(x - x(w)) - \sin\psi(y - y(w)) + x(w) \\ \sin\psi(x - x(w)) + \cos\psi(y - y(w)) + y(w) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dalším příkladem je tzv. **zrcadlení vzhledem k přímce**. Opět nám bude stačit popsat zrcadlení vzhledem k přímkám procházejícím počátkem O a ostatní se z nich odvodí pomocí translací. Hledáme matici Z_ψ zrcadlení vzhledem k přímce s jednotkovým směrovým vektorem v svírajícím úhel ψ s vektorem $(1, 0)$. Např.

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a obecně můžeme psát (otočíme do „nulové“ polohy, odzrcadlíme a vrátíme zpět)

$$Z_\psi = R_\psi \cdot Z_0 \cdot R_{-\psi}.$$

Díky asociativitě násobení matic spočteme:

$$
\begin{aligned}
R_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\psi - \sin^2\psi & 2\sin\psi\cos\psi \\ 2\sin\psi\cos\psi & -(\cos^2\psi - \sin^2\psi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Povšimněme si také, že

$$Z_\psi \cdot Z_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}.$$

To lze zformulovat jako

Theorem

Otočení o úhel ψ obdržíme následným provedením dvou zrcadlení vzhledem ke směrům, které spolu svírají úhel $\frac{1}{2}\psi$.

Pokud umíme odůvodnit předchozí tvrzení ryze geometrickou úvahou (zkuste), dokázali jsme právě standardní formule pro goniometrické funkce dvojnásobného úhlu.

Hlubší je následující rekapitulace předchozích úvah:

Theorem

Lineární zobrazení euklidovské roviny je složeno ze zrcadlení právě, když je dáno maticí R splňující

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ab + cd = 0, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1.$$

To nastane právě, když toto zobrazení zachovává velikosti. Otočením je přitom právě tehdy, když je determinant matice R roven jedné, což odpovídá sudému počtu zrcadlení. Při lichém počtu zdrcadlení je determinant roven -1.

Obsah trojúhelníka

Závěrem našeho malého výletu do geometrie se zaměřme na pojem obsah. Trojúhelník je vymezen dvojicí vektorů v a w, které přiloženy do počátku O zadají zbylé dva vrcholy. Chtěli bychom tedy najít formuli (skalární funkci vol), která dvěma vektorům přiřadí číslo rovné obsahu $\operatorname{vol}\Delta(v,w)$ takto definovaného trojúhelníku $\Delta(v,w)$. Ze zadání je vidět, že by mělo platit

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\Delta(v+v',w) &= \operatorname{vol}\Delta(v,w)+\operatorname{vol}\Delta(v',w)\\ \operatorname{vol}\Delta(av,w) &= a\operatorname{vol}\Delta(v,w)\end{aligned}$$

a přidejme požadavek

$$\operatorname{vol}\Delta(v,w) = -\operatorname{vol}\Delta(w,v),$$

který odpovídá představě, že opatříme plochu znaménkem podle toho, v jakém pořadí bereme vektory.

Pokud vektory v a w napíšeme do sloupců matice A, pak

$$A = (v, w) \mapsto \det A$$

splňuje všechny tři naše požadavky. Kolik takových zobrazení ale může být?
Každý vektor umíme vyjádřit pomocí dvou souřadných vektorů $v = (1, 0)$ a $w = (0, 1)$ a evidentně tedy každá možnost pro $\operatorname{vol} \Delta$ je jednoznačně určena už vyčíslením na této jediné dvojici argumentů (v, w). Jsou si tedy všechny možnosti rovny až na skalární násobek. Ten umíme určit požadavkem

$$\operatorname{vol} \Delta((1, 0), (1, 0)) = \frac{1}{2},$$

tj. volíme **orientaci** a **měřítko**.
Vidíme tedy, že determinant zadává plochu rovnoběžnostěnu určeného sloupci matice A (a plocha trojúhelníku je tedy poloviční).

Předchozí popis hodnot pro orientovaný objem nám dává do rukou elegantní nástroj pro určování viditelnosti orientovaných úseček. Orientovanou úsečkou rozumíme dva body v rovině $\mathbb{R}^2$ s určením pořadím. Můžeme si ji představovat jako šipku od prvého k druhému bodu. Taková orientovaná úsečka nám rozděluje rovinu na dvě poloroviny, říkejme jim „levou" a „pravou".

Jestliže uvažujeme obvyklou orientaci „proti směru hodinových ručiček" pro hranici mnohoúhelníku, pak pozorovatel nalevo od orientované úsečky (tj. uvnitř takového mnohoúhelníka) tuto vidí a naopak pozorovatel napravo ji nevidí. Má tedy smysl ptát se, jestli je orientovaná úsečka $[A, B]$ v rovině viditelná z bodu C.

Spočtěme orientovanou plochu příslušného trojúhelníku zadaného vektory $A - C$ a $B - C$. Pokud jsme s bodem C nalevo od úsečky, pak při naší orientaci bude vektor $A - C$ dříve než ten druhý a proto výsledná plocha (tj. hodnota determinantu) bude kladná. To odpovídá situaci, kdy úsečku vidíme. Naopak, při opačné poloze bude výsledkem záporná hodnota determinantu a podle zjistíme, že úsečku nevidíme.
Uvedený jednoduchý postup je často využíván pro testování polohy při standardních úlohách v 2D grafice.