Drsná matematika I – 1. přednáška
Skalární funkce a diferenční rovnice

Jan Slovák

Masarykova univerzita

19. 9. 2011

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Podmínky pro absolvování předmětu

Dle univerzitních pravidel mají být během prvních dvou týdnů semestru přesně stanoveny podmínky pro absolvování kurzu .

Protože jde v tomto případě o první (v jistém smyslu pokusný) běh výuky pro nový studijní obor, rádi bychom k výuce přistupovali velmi osobně. To je možné i díky malým počtům studentů.

Během semestru budeme jistě psát dvě průběžné písemky, za nimi bude následovat třetí společně s ústní zkouškou.

K dispozici budou texty průběžně připravované učebnice, podle které bude přednášena teoretická i praktická část (pondělí a čtvrtek), a studenti by měli být na čtvrteční cvičení dobře připraveni na aktivní řešení úloh a diskusi o textu.

Místo domácích úloh bychom rádi dostávali odezvu na text (komentáře, dotazy, upozornění na chyby v textu apod.)

Formy splupráce budou ještě upřesněny během semestru (po několika týdnech).

Míváme (často chorobnou) snahu mít jasno

- kolik něco je
- za kolik to je,
- jak dlouho to je
- kde přesně to je
- ...

a výsledkem takových úvah je většinou nějaké „číslo“, případně spousta čísel.
Budeme učeněji říkat „hodnoty“.

Za číslo se přitom považuje něco, co umíme sčítat a násobit a splňuje to obvyklé zákonitosti, ať už všechny nebo jen některé.

Nejjednodušší příklady jsou přirozená čísla, budeme je značit

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(v informatice brána včetně nuly, jinde spíše ne), a čísla celá

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Formálně můžeme definovat

$$0 := \emptyset,\ 1 := \{\emptyset\},\ 2 := \{\emptyset, 1\}, \dots, n+1 := \{0, 1, \dots, n\}.$$

Pak lze snadno formálně definovat sčítání a násobení celých čísel, uspořádání, ukázat, že každá podmnožina v $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek a spoustu dalších vlastností o kterých zpravidla už dávno nepřemýšlíme a máme je za samozřejmé.

Budeme navíc místo s čísly manipulovat s písmeny abecedy, případně jinými znaky, ať už jejich hodnota je nebo není předem známá.

Vlastnosti sčítání

Vyjmenujme takto obvyklé vlastnosti, které sčítání a násobení čísel má:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \text{ pro všechny } a, b, c \tag{KG1}$$

$$a+b = b+a, \text{ pro všechny } a, b \tag{KG2}$$

$$\text{existuje prvek } 0 \text{ tak, že pro všechny } a \text{ je } a+0 = a \tag{KG3}$$

$$\text{pro všechny } a \text{ existuje } (-a) \text{ tak, že } \; a+(-a) = 0. \tag{KG4}$$

Vlastnostem (KG1) – (KG4) říkáme vlastnosti **komutativní grupy**. Celá čísla $\mathbb{Z}$ jsou dobrým příkladem komutativní grupy, přirozená čísla nikoliv, protože nesplňují KG4 (a případně neobsahují nulu pokud ji do $\mathbb{N}$ nezahrnujeme).

Vlastnosti násobení

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pro všechny } a, b, c \tag{O1}$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pro všechny } a, b \tag{O2}$$

$$\text{existuje prvek 1 takový, že pro všechny } a \text{ platí } 1 \cdot a = a \tag{O3}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pro všechny } a, b, c. \tag{O4}$$

Poslední vlastnosti O4 se říká **distributivita**.
Množiny s operacemi $+$, $\cdot$ a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají **komutativní okruhy**. Potřebujeme však zpravidla ještě další běžnou vlastnost čísel:

$$\text{pro každé } a \neq 0 \text{ existuje } a^{-1} \text{ tak, že platí, } a \cdot a^{-1} = 1. \tag{P}$$

Když naše objekty splňují navíc i (P), hovoříme o **poli** (často také o **komutativním tělese**).

Někdy se ale setkáme se slabší dodatečnou vlastností než je (P). Např. okruh celých čísel $\mathbb{Z}$ nesplňuje (P), ale splňuje

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{buď } a = 0 \text{ nebo } b = 0. \tag{OI}$$

Hovoříme o **oboru integrity**.
Prvky nějaké množiny s operacemi $+$ a $\cdot$ splňujícími (ne nutně všechny) výše uvedené vlastnosti (tj. komutativní okruh, obor integrity, pole) budeme nazývat skaláry.

Budeme pro ně vesměs užívat latinská písmena ze začátku abecedy.

Většinou hodnoty neznáme, místo toho ale něco víme o závislosti naší hodnoty na hodnotách jiných.
Formálně píšeme, že hodnota

$$y = f(x)$$

naší „závislé" veličiny y je dána „nezávislou" veličinou x.
Přitom bereme f jen *formálně* (jenom víme, že je definována) nebo *operačně* (tj. $f(x)$ je dáno formulí poskládanou ze známých operací.
Je-li hodnotou skalár, hovoříme o **skalární funkci**. Hodnoty mohou být také dány pouze přibližně nebo s jistou pravděpodobností.
Matematické úvahy z formálního popisu nachází explicitní formule, které funkce popisují. Pracujeme s:

- s přesným a konečným výrazem
- s nekonečným výrazem
- s přiblížením neznámé funkce známým odhadem (většinou s vyčíslenou možnou chybou)
- s odhadem hodnot s vyčíslením jejich pravděpodobnosti apod.

Example

(1) Roční mzda pracovníků (hodnoty nezávislé veličiny jsou jednotliví pracovníci x z nějaké množiny, $f(x)$ je jejich roční mzda za dané období),
(2) měsíční mzda konkrétního pracovníka v čase (nezávislou hodnotou je čas v měsících, závislou příjem).
(3) Plocha obrazce v rovině, objem tělesa v prostoru, rychlost konkrétního auta v čase atd. Dovedeme si jistě představit, že ve všech uvedených případech může být hodnota dána nějakou volně popsanou souvislostí nebo naměřena přibližně nebo odhadnuta atd.
(4) Obyčejné sčítání nebo násobení přirozených čísel
(5) Důležitou operačně definovou skalární funkcí na přirozených číslech je **faktoriál**, který definujeme vztahy

$$f(0) = 1, \; f(n+1) = (n+1) \cdot f(n).$$

Píšeme $f(n) = n!$ a definice zjevně znamená $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$. (To není příliš efektivní formule pro velká n, lepší ale těžko hledat.)

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \ldots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.
Dokázali jsme tak:

Theorem

Počet různých pořadí na konečné množině s n prvky je dán funkcí faktoriál:

$$f(n) = n!$$

Kombinace

Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené formulí je počet způsobů, kterými lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů.
Zjevně máme $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ možných výsledků postupného výběru našich k prvků, přitom ale stejnou výslednou k-tici dostaneme v $k!$ různých pořadích.
Dokázali jsme tedy:

Theorem

Pro počet **kombinací k-tého stupně** *z n prvků platí (samozřejmě je $k \leq n$)*

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Číslům $c(n,k)$ říkáme **binomická čísla**.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**. Jak jsme si již ověřili:

Theorem

Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \le k \le n$ *(a nula jinak).*

Binomická čísla dostala svůj název od tzv. binomického rozvoje:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

protože koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ je roven právě počtu možností, jak vybrat k-tici z n závorek v součinu.
Všimněme si, že pro odvození jsme potřebovali pouze distributivitu, komutativnost a asociativitu násobení a sčítání. Formule proto platí v každém komutativním okruhu.

Jako ukázku, jak vypadá matematický důkaz si odvoďme několik jednoduchých tvrzení o kombinačních číslech. Definujme $\binom{n}{k} = 0$, kdykoliv je buď $k < 0$ nebo $k > n$.

Theorem

Pro všechna přirozená čísla k a n platí

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Pascalův trojúhelník

Všechna kombinační čísla si můžeme sestavit do tzv. **Pascalova trojúhelníku**, kde každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & \\
n=1: & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & \\
n=2: & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & \\
n=3: & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 \\
n=4: 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

V jednotlivých řádcích máme právě koeficienty u jednotlivých mocnin z binomického rozvoje, např.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme **permutace s opakovaním**. Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakováním budeme značit $P(p_1, \ldots, p_k)$. Zřejmě platí:

Theorem

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr prvků z n možností, včetně pořadí, nazýváme **variace** k**-tého stupně s opakováním**, jejich počet budeme značit $V(n,k)$. Předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou. Zřejmě platí:

Theorem

$$V(n,k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o **kombinacích s opakováním** a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$.

Theorem

Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechny $0 \leq k$ *a* $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

V předchozích odstavcích jsme viděli formule, které zadávaly hodnotu skalární funkce definované na přirozených číslech (faktoriál) nebo dvojicích čísel (binomická čísla) pomocí předcházejících hodnot. Tomu lze rozumět také tak, že místo hodnoty naší funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné. Např.

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}$$

říká, že rozdíl počtu možností, jak vybrat $k+1$ prvků z $n+1$ možností, je vyjádřitelný pomocí (možná již známé) hodnoty.

Takto se skutečně velice často postupuje při matematické formulaci modelů, které popisují reálné systémy v ekonomice, biologii apod. My si tu povšimneme jen nejednodušších případů a budeme se k této tématice postupně vracet.

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel.

Je zřejmé, že takový vztah, spolu s volbou pro $f(0)$, zadává jednoznačně celou nekonečnou posloupnost hodnot $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$. Jako příklad může sloužit definiční formule pro faktoriál, tj.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i na hodnotě $f(n)$.

lineární diferenční rovnice

Po konstantní závislosti je nejjednodušší

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde a, $b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu.
Rovnice s b nenulovým se objeví při úročení (ať už vkladu nebo půjčky – jde jen o znaménko ...)

Obecně pro rovnice prvního řádu s proměnnými koeficienty platí

Theorem

Obecné řešení diferenční rovnice prvního řádu

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n$$

s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ *je dáno vztahem*

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r .$$

Corollary

Obecné řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $a \neq 1$, b a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

Důkaz.

Dosazením konstantních hodnot za a_i a b_i do obecné formule dostáváme první sčítanec okamžitě.
Pro vyčíslení součtu součinů v druhém si je třeba všimnout, že se jedná o výrazy $(1 + a + \cdots + a^{n-1})b$. Sečtením této geometrické řady (připomeňme, že $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$) dostaneme právě požadovaný výsledek. □

Uveďme si praktický příklad na řešení diferenčních rovnic prvního řádu:

Example

Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?