3.10 Rezoluční metoda ve výrokové logice

Rezoluční metoda rozhoduje, zda daná množina klausulí je splnitelná nebo je nesplnitelná. Tím je také "universální metodou" pro řešení problémů, neboť:

1. Daná formule φ je sémantickým důsledkem množiny formulí S právě tehdy, když množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.

2. Ke každé formuli α existuje množina klausulí S_α taková, že α je pravdivá v pravdivostním ohodnocení právě tehdy, když v tomto ohodnocení je pravdivá množina S_α.

3.10.1 Klausule. Množinu všech logických proměnných označíme A. Připomeňme, že *literál* je buď logická proměnná (tzv. *positivní literál*) nebo negace logické proměnné (tzv. *negativní literál*). *Komplementární literály* jsou literály p a $\neg p$. *Klausule* je literál nebo disjunkce konečně mnoha literálů.

Zvláštní místo mezi klausulemi zaujímá *prázdná klausule*, tj. klausule, která neobsahuje žádný literál a tudíž se jedná o kontradikci. Proto ji budeme označovat F.

Pro jednoduchost zavedeme následující konvenci: Máme dánu klausuli C a literál p, který se v C vyskytuje. Pak symbolem $C \setminus p$ označujeme klausuli, která obsahuje všechny literály jako C kromě p. Tedy např. je-li $C = \neg x \vee y \vee \neg z$, pak

$$C \setminus \neg z = \neg x \vee y.$$

3.10.2 Rezolventa. Řekneme, že klausule D je *rezolventou klausulí* C_1 a C_2 právě tehdy, když existuje literál p takový, že p se vyskytuje v klausuli C_1, $\neg p$ se vyskytuje v klausuli C_2 a

$$D = (C_1 \setminus p) \vee (C_2 \setminus \neg p).$$

Také říkáme, že klausule D je *rezolventou C_1 a C_2 podle literálu p* a značíme $D = res_p(C_1, C_2)$.

3.10.3 Tvrzení. Máme dány dvě klausule C_1, C_2 a označme D jejich rezolventu. Pak D je sémantický důsledek množiny $\{C_1, C_2\}$.

3.10.4 Tvrzení. Máme dánu množinu klausulí S a označme D rezolventu některých dvou klausulí z množiny S. Pak množiny S a $S \cup \{D\}$ jsou pravdivé ve stejných pravdivostních ohodnoceních.

3.10.5 Rezoluční princip. Označme

$$\begin{aligned}
R(S) &= S \cup \{D \mid D \text{ je rezolventa některých klausulí z } S\} \\
R^0(S) &= S \\
R^{i+1}(S) &= R(R^i(S)) \quad \text{pro} \quad i \in \mathbb{N} \\
R^\star(S) &= \bigcup\{R^i(S) \mid i \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Protože pro konečnou množinu logických proměnných existuje jen konečně mnoho klausulí, musí existovat přirozené číslo n takové, že $R^n(S) = R^{n+1}(S)$. Pro toto n platí $R^n(S) = R^\star(S)$.

3.10.6 Věta (Rezoluční princip). Množina klausulí S je splnitelná právě tehdy, když $R^\star(S)$ neobsahuje prázdnou klausuli F.

3.10.7 Základní postup. Předchozí věta dává návod, jak zjistit, zda daná množina klausulí je spnitelná nebo je nesplnitelná:

1. Formule množiny M převedeme do CNF a množinu M pak nahradíme množinou S všech klausulí vyskytujících se v některé formuli v CNF. Klausule, které jsou tautologiemi, vynecháme. Jestliže nám nezbyde žádná klausule, množina M se skládala z tautologií a je pravdivá v každém pravdivostním ohodnocení.
2. Vytvoříme $R^\star(S)$.
3. Obsahuje-li $R^\star(S)$ prázdnou klausuli, je množina S (a tedy i množina M) nesplnitelná, v opačném případě je M splnitelná.

Je zřejmé, že konstrukce celé množiny $R^\star(S)$ může být zbytečná — stačí pouze zjistit, zda $R^\star(S)$ obsahuje F.

3.10.8 Výhodnější postup. Existuje ještě jeden postup, který usnadní práci s použitím rezoluční metody. Ten nejenom že nám odpoví na otázku, zda konečná množina klausulí S je splnitelná nebo nesplnitelná, ale dokonce nám umožní v případě splnitelnosti sestrojit aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, v němž je množina S pravdivá.

Máme konečnou množinu klausulí S, kde žádná klausule není tautologií. Zvolíme jednu logickou proměnnou (označme ji x), která se v některé z klausulí z S vyskytuje. Najdeme množinu klausulí S_1 s těmito vlastnostmi:

1. Žádná klausule v S_1 neobsahuje logickou proměnnou x.
2. Množina S_1 je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná původní množina S.

Množinu S_1 vytvoříme takto: Rozdělíme klausule množiny S do tří skupin:

M_0 se skládá ze všech klausulí množiny S, které neobsahují logickou proměnnou x.

M_x se skládá ze všech klausulí množiny S, které obsahují positivní literál x.

$M_{\neg x}$ se skládá ze všech klausulí množiny S, které obsahují negativní literál $\neg x$.

Označme N množinu všech rezolvent klausulí množiny S podle literálu x; tj. rezolvent vždy jedné klausule z množiny M_x s jednou klausulí z množiny $M_{\neg x}$. Všechny tautologie vyřadíme.

Položíme $S_1 = M_0 \cup N$.

3.10.9 Tvrzení. Množina klausulí S_1 zkonstruovaná výše je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S.

3.10.10 Dostali jsme tedy množinu klausulí S_1, která již neobsahuje logickou proměnnou x a je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S. Navíc, množina S_1 má o jednu logickou proměnnou méně než množina S.

Nyní opakujeme postup pro množinu S_1. Postup skončí jedním ze dvou možných způsobů:

1. Při vytváření rezolvent dostaneme prázdnou kalusuli F. Tedy S je nesplnitelná.
2. Dostaneme prázdnou množinu klausulí. V tomto případě je množina S splnitelná.

3.10.11 Je výhodné předchozí postup znázorňovat v tabulce. Na začátku práce utvoříme tabulku, která obsahuje pro každou klausuli množiny S jeden sloupec. V prvním řádku vybereme jednu proměnnou, řekněme x, a řádek označíme proměnnou x. Procházíme neoznačené sloupce tabulky, které odpovídají klausulím obsahujícím proměnnou x. Ve sloupci do řádku napíšeme 1, v případě, že klasusule obsahuje literál x, nebo 0, v případě, že klausule obsahuje literál $\neg x$.

Vybereme libovolnou klausuli C_1, která má v řádku 1, a libovolnou klausuli C_2, která má v řádku 0. Sloupec pro jejich rezolventu podle x přidáme v případě, že se jedná o novou klausuli, která není tautologií. Jestliže žádný sloupec není v řádku označen 1 ($M_x = \emptyset$) nebo žádný sloupec není v řádku označen 0 ($M_{\neg x} = \emptyset$), nepřidáváme nic.

Jestliže jsme přidali prázdnou klausuli, výpočet končí, množina S je nesplnitelná. Jestliže každý sloupec již má 1 nebo 0, výpočet ukončíme, množina S je splnitelná. Tím jsme ukončili první krok.

Ve druhém kroku se zajímáme jen o sloupce tabulky, které nemají ještě ani číslo 1 ani 0 (tyto sloupce tvoří množiny S_1). Opět vybereme proměnnou, která se v některé ze zbylých klausulí vyskytuje. Postupujeme dále jako v kroku 1.

Celý postup tedy končí buď přidáním prázdné klausule, v tom případě je množina S nesplnitelná, nebo vyčerpáním neoznačených sloupců, v tomto případě je množina S splnitelná.

3.10.12 Příklad. Rezoluční metodou rozhodněte, zda množina klausulí

$$S = \{x \vee y \vee \neg z, \neg x, x \vee y \vee z, x \vee \neg y, z \vee t \vee v, \neg t \vee w\}$$

je splnitelná. V kladném případě najděme pravdivostní ohodnocení, v němž je S pravdivá.

Vyjdeme z tabulky, která má jeden sloupec pro každou klausuli množiny S. (Sledujte tabulku 3.1.)

	$x \vee y \vee \neg z$	$\neg x$	$x \vee y \vee z$	$x \vee \neg y$	$z \vee t \vee v$	$\neg t \vee w$					
y:	1		1	0			$x \vee \neg z$	$x \vee z$			
x:		0					1	1	$\neg z$	z	
z:					1				0	1	F

Tabulka 3.1: Tabulka pro rezoluční metodu

Nejprve odstraňujeme logickou proměnnou y: První řádek označíme y. Do sloupce napíšeme 1 v případě, že jeho klausule obsahuje literál y (první a třetí sloupec), a napíšeme 0 v případě, že klausule sloupce obsahuje literál $\neg y$ (čtvrtý sloupec). Tím jsme označili všechny sloupce, jejichž klausule obsahují proměnnou y. K tabulce přidáme rezolventy klausulí podle literálu y: Jsou to klausule

$$x \vee \neg z = res_y(x \vee y \vee \neg z, x \vee \neg y) \quad \text{a} \quad x \vee z = res_y(x \vee y \vee z, x \vee \neg y).$$

Množina S_1 z našeho postupu je nyní tvořena všemi klausulemi, jejichž sloupce ještě nejsou označeny 0 nebo 1. Tedy

$$S_1 = \{\neg x, z \vee t \vee v, \neg t \vee w, x \vee \neg z, x \vee z\}.$$

V dalším kroku odstraníme logickou proměnnou x: V řádku odpovídajícím proměnné x napíšeme 0 do druhého sloupce (klausule $\neg x$) a napíšeme 1 do sedmého a osmého sloupce (klausule $x \vee \neg z$ a $x \vee z$). K tabulce přidáme sloupce pro rezolventy klausulí množiny S_1 podle literálu x. Jsou to $\neg z = res_x(\neg x, x \vee \vee \neg z)$ a $z = res_x(\neg x, x \vee z)$. Nyní stačí rozhodnout, zda je splnitelná množina klausulí

$$S_2 = \{z \vee t \vee v, \neg t \vee w, \neg z, z\}.$$

Dále vybereme logickou proměnnou z. Do pátého a desátého sloupce vepíšeme 1 (jejich klausule obsahují literál z) a do devátého sloupce napíšeme 0 (jeho klausule obsahuje literál $\neg z$). Jako rezolventu klausulí z devátého a desátého sloupce dostáváme prázdnou klausuli F. Proto je množina S_2 nesplnitelná. To znamená, že také množiny S_1 a S jsou nesplnitelné.

3.10.13 Příklad. Rezoluční metodou rozhodněme, zda množina klausulí

$$S = \{a \vee \neg d, \neg b \vee \neg c, b \vee d, \neg b \vee \neg e, a \vee c \vee d, \neg a \vee \neg d\}$$

je splnitelná. V kladném případě najděme pravdivostní ohodnocení, ve kterém je množina S pravdivá.

Postupujeme obdobně jako v předcházejícím příkladě. Sledujte tabulku 3.2. Postupujme trochu rychleji.

	$a \vee \neg d$	$\neg b \vee \neg c$	$b \vee d$	$\neg b \vee \neg e$	$a \vee c \vee d$	$\neg a \vee \neg d$			
e:				0					
c:		0			1		$a \vee \neg b \vee d$		
b:			1				0	$a \vee d$	
d:	0					0		1	a
a:									1

Tabulka 3.2: Konstrukce rezoluční tabulky shora dolů

První řádek odpovídá logické proměnné e. Protože tuto proměnnou obsahuje jen klausule $\neg b \vee \neg e$, řádek obsahuje pouze jedinou 0. Žádnou rezolventu podle proměnné e nelze utvořit (a nepřidáváme proto žádný sloupec).

Druhý řádek odpovídá logické proměnné c. V řádku máme jednu 0 (v druhém sloupci) a jednu 1 (v pátém sloupci). K tabulce přidáme rezolventu $a \vee \neg b \vee d$.

Třetí řádek odpovídá logické proměnné b. Máme dva sloupce, jejichž klausule obsahuje logickou proměnnou b a které ještě nebyly označeny. Jsou to třetí a sedmý sloupec. Do třetího sloupce píšeme 1, do sedmého 0. Přidáme k tabulce nový sloupec odpovídající rezolventě $a \vee d$.

Čtvrtý řádek odpovídá logické proměnné d. Všechny dosud nevyplněné sloupce odpovídají klausulím, které proměnnou d obsahují. Do prvního a šestého sloupce vepíšeme 0 a do osmého sloupce 1. Máme dvě rezolventy podle proměnné d a to klausuli a (rezolventa klausulí z prvního a osmého sloupce) a klausuli $a \vee \vee \neg a$ (z šestého a osmého sloupce). Druhá klausule je tautologie, takže ji dále neuvažujeme a její sloupec k tabulce nepřidáváme. K tabulce přidáme pouze sloupec pro klausuli a.

Poslední logická proměnná je a. Zbývá pouze jediný nevyplněný sloupec, a to poslední; napíšeme do něj 1.

Tím jsme vyčerpali všechny logické proměnné a dostali jsme prázdnou množinu klausulí. Ta je jistě splnitelná a proto je splnitelná i celá množina S.

Zkonstruujeme zpětně pravdivostní ohodnocení u, v němž je množina S pravdivá. Sledujte tabulku 3.3.

	$a \vee \neg d$	$\neg b \vee \neg c$	$b \vee d$	$\neg b \vee \neg e$	$a \vee c \vee d$	$\neg a \vee \neg d$			
e:				0					
c:		0			1		$a \vee \neg b \vee d$		
b:			1				0	$a \vee d$	
d:	0					0		1	a
a:									1
	$\uparrow_1$	$\uparrow_4$	$\uparrow_3$	$\uparrow_5$	$\uparrow_1$	$\uparrow_2$	$\uparrow_1$	$\uparrow_1$	$\uparrow_1$

Tabulka 3.3: Konstrukce splňujícího ohodnocení — četba tabulky zdola nahoru

Začneme od posledního řádku naší tabulky. Protože tento řádek obsahuje 1, položíme $u(a) = 1$. Vyznačíme šipkou v tabulce všechny sloupce, které odpovídají klausuli s pozitivním literálem a. Jedná se o první, pátý, sedmý, osmý a devátý sloupec. Všechny jejich klausule jsou pravdivé v u nezávisle na tom, jaké hodnoty bude mít ohodnocení u pro ostatní logické proměnné. K šipkám označujícím sloupce připisujeme pro přehlednost i číslo, které říká, v kterém kroku jsme sloupec označili.

Přejdeme na předcházející řádek. Ve sloupcích, které ještě nebyly označeny šipkou, se vyskytuje pouze 0, a to v šestém sloupci. Položíme proto $u(d) = 0$ a opět označíme všechny dosud neoznačené sloupce, jejichž klausule se touto volbou stanou pravdivé. V našem případě je to pouze šestý sloupec.

V řádku odpovídajícím logické proměnné b máme 1 (sedmý sloupec, který obsahuje 0, již byl označem — jeho klausule je pravdivá, protože obsahuje positivní literál a). Položíme proto $u(b) = 1$ a označíme třetí sloupec.

V řádku odpovídajícím logické proměnné c máme neoznačený druhý sloupec, kde je 0. Položíme proto $u(c) = 0$. Touto volbou se stane pravdivou i klausule odpovídající tomuto sloupci.

Ze všech sloupců nyní pouze čtvrtý sloupec není označen. V řádku odpovídajícím logické proměnné e má 0, proto položíme $u(e) = 0$ a označíme i tento sloupec.

Není obtížné se přesvědčit, že v pravdivostním ohodnocení u definovaném: $u(a) = u(b) = 1$, $u(c) = u(d) = u(e) = 0$, je množina S pravdivá.