Signály a lineárni systémy
Signály spojité v čase

Institut biostatistiky a analýz
Masarykova univerzita

7. listopadu 2012

Harmonická funkcia

$$x(t) = A.cos(\omega t + \phi_0)$$

- A
- ω
- ϕ_0
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Frekvenčné spektrum- rozloženie amplitúd a počiatočných fáz jednotlivých harmonických zložiek v závislosti na frekvencii

Konvolúcia

- Konvolúcia je definovaná vzťahom

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

- Vlastnosti konvolúcie
    - komutativita
    - distributvita
    - asociativita
    - šírkova vlastnosť konvolúcie

Konvolúcia príklad

- Konvolúcia

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

- $x_2(t)$ sa nazýva konvolučné jadro a určme si ho ako

$$x_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 3\rangle \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

- $x_1(t)$ nech je postupne

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 1\rangle \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad x_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 2\rangle \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 3\rangle \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad x_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle -1, 1\rangle \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

- vyrátajte a nakreslite graf konvolúcie $c(t) = x_1(t) * x_2(t)$

Korelácia a kovariancia

- Korelačná funkcia (pre periodické signály) je definovaná

$$R(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(\tau) x_2(t+\tau) d\tau$$

- určte korelačnú funkciu pre

$$x_1(t) = \sin \frac{\pi t}{2} \qquad x_2(t) = 4 + \sin \frac{\pi t}{2}$$

- Autokovariančná funkcia je daná

$$C(t) = \frac{1}{T} \int_0^T (x(\tau) - \mu)(x(\tau + t) - \mu)$$

- vyrátajte autokovariančnú funkciu pre

$$x(t) = 3 + \cos \pi t$$

Fouriérova transformácia a spektrálna hustota

- Fouriérova transformácia a spektrálna hustota funkcie $x(t)$ sú dané predpisom

$$X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\xi t} dt$$

- niektoré vlastnosti
  - $\widehat{x_1(t) + x_2(t)} = X_1(\xi) + X_2(\xi)$
  - $\widehat{x(t/a)} = aX(a\xi)$
  - $\widehat{x'(t)} = i\xi X(\xi)$
  - $(X(\xi))' = \widehat{i\xi x(t)}$
- Vyrátajte Fouriérovu transformáciu štandardizovaného normálneho rozloženia

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Čo sa stane keď fouriérujeme konvolúciu dvoch funkcií?

Centrálna limitná veta

- Nech X a Y sú nezávislé spojité náhodné veličiny. X má hustotu f a Y sa riadi hustotou g. Potom

$$X + Y \sim f * g$$

- Linderbergova centrálna limitná veta: Nech X_i, $i = 1, 2, \ldots,$ je postupnosť nezávislých rovnako rozložených náhodných veličín s hustotou $f, F \in C^2(R).E(X_i) = 0, E^2(X_i) = 1$. Potom hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ sa blíži k hustote štandardizovaného normálneho rozloženia, teda

$$P(a \leq \frac{X_1 + X_2 + \ dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq b) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$