



# SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTEMY



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

**[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz)**

© Institut biostatistiky a analýz

# II. SIGNÁLY ZÁKLADNÍ POJMY

# SIGNÁL - DEFINICE

# SIGNÁL - DEFINICE

**Signál** je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

Je-li zdrojem informace živý organismus, pak hovoříme o **biosignálech** bez ohledu na podstatu **nosiče informace**.

# SIGNÁLY \* MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné signály vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) modely;
- ☑ model signálu by měl splňovat dva základní požadavky:
  - výstižnost, přesnost;
  - jednoduchost, snadná manipulace;

# KLASIFIKACE SIGNÁLŮ

## (JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

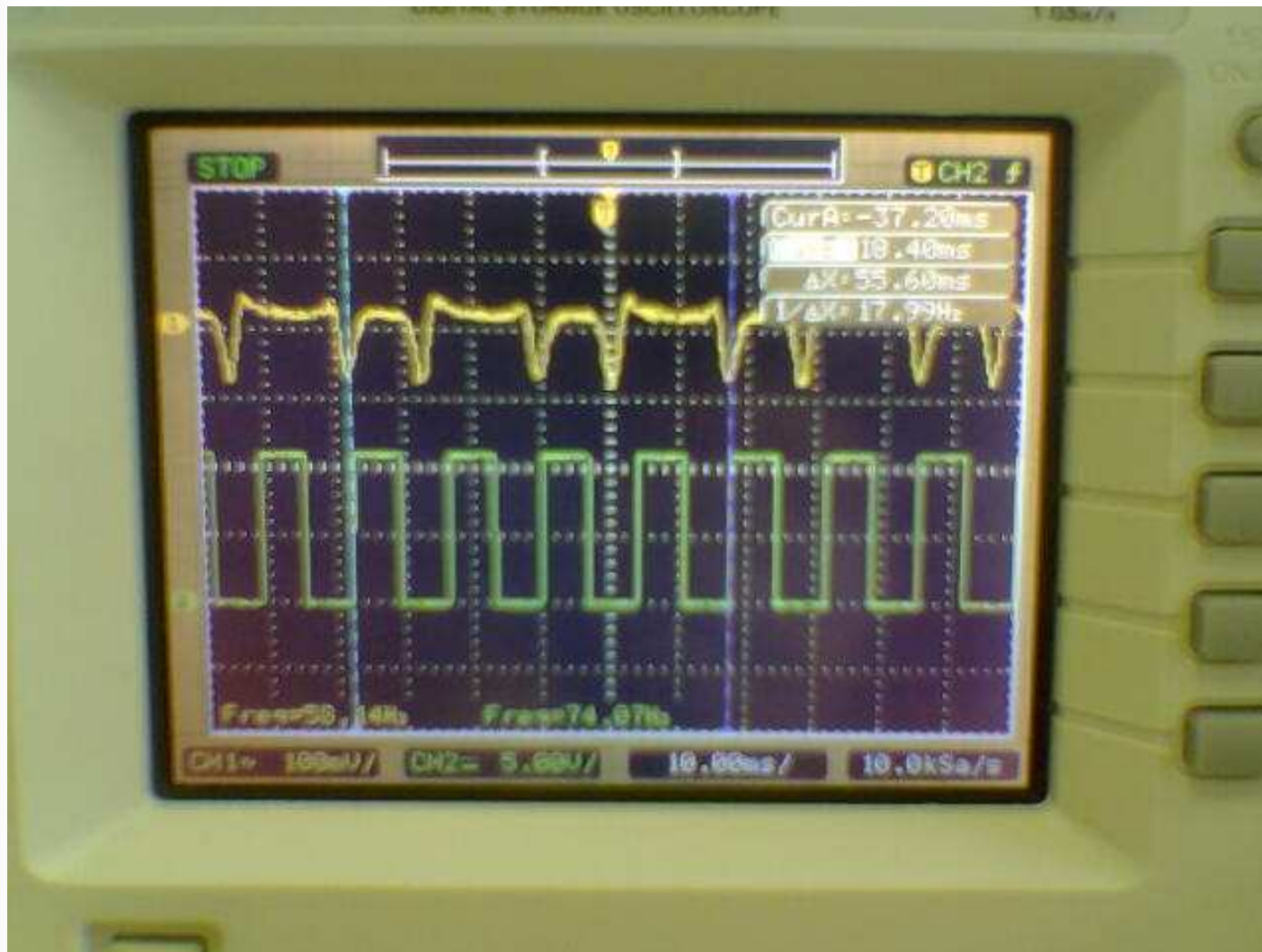
- A) Spojité a diskrétní signály  
Analogové a digitální (číslicové) signály
- B) Reálné a komplexní signály
- C) Deterministické a náhodné signály
- D) Sudé a liché signály
- E) Periodické a neperiodické signály

# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- ✓ **Spojité signál** (přesněji **signál se spojitým časem**) je takový signál  $x(t)$ , kde čas  $t$  je spojitá proměnná.
- ✓ **Diskrétní signál** (přesněji **signál s diskrétním časem**) je takový signál  $x(t)$ , kde čas  $t$  je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní signál proto často zapisujeme jako **posloupnost**  $\{x_n\}$ , kde  $n$  je celé číslo, resp.  $x(nT)$ .

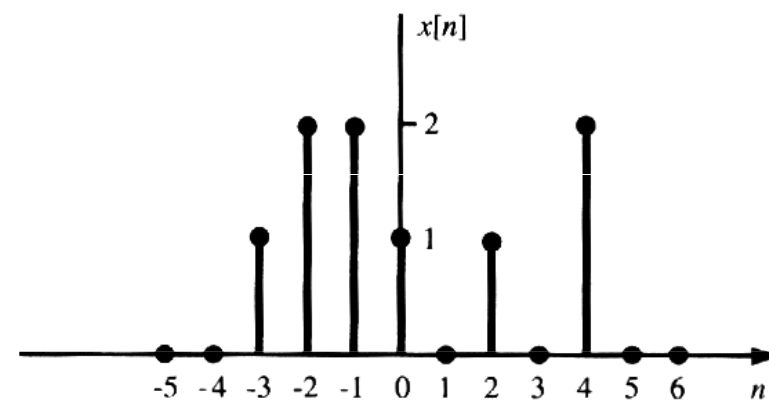
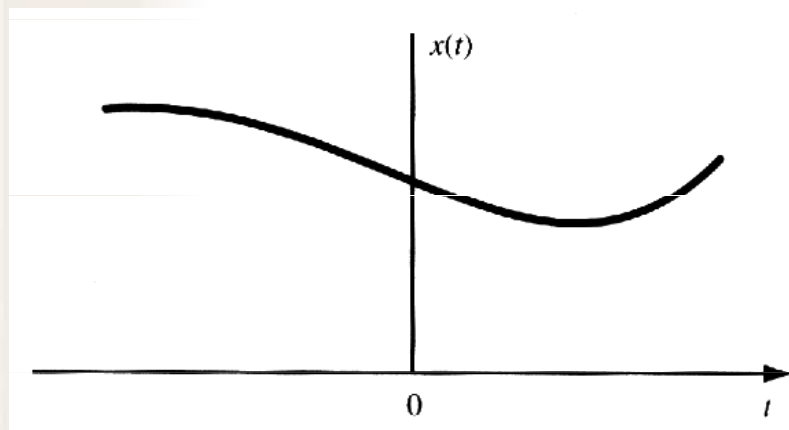
**Pozn.** Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu **hodnot** funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitý signál v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál.

# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



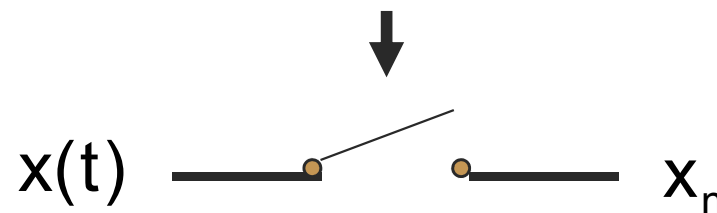


# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- ✓ U diskretního signálu není hodnota signálu mezi jednotlivými diskretními časovými okamžiky definována.
- ✓ Diskretní signál lze také získat **vzorkováním** spojitého signálu:  $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n), \dots$  (též značení  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ). Hodnoty  $x_i = x_i(t)$  se nazývají **vzorky**.



# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

☑ Diskrétní signál vyjádřený posloupností můžeme zapsat

→ funčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$$

→ explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots\}$$

(zde se implicitně předpokládá, že prvky jsou číslovány od nuly a pro záporné indexy  $n$  jsou hodnoty nulové)

# ANALOGOVÉ A DIGITÁLNÍ (ČÍSLICOVÉ) SIGNÁLY

- ✓ **Analogový signál** nabývá hodnot ze spojitého intervalu.
- ✓ **Digitální (číslicový) signál** nabývá hodnot z konečné množiny hodnot.

*Příkladem analogového signálu může být např. EKG signál zaznamenaný na papír nebo hodnota napětí zobrazená na analogovém osciloskopu.*

*Příkladem digitálního signálu může být např. barva pixelu digitální fotografie  $\langle 0; 255 \rangle$ .*

- ✓ **Kvantování** je proces, kterým se převádí spojitě hodnoty veličin na diskrétní.

## B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ SIGNÁLY

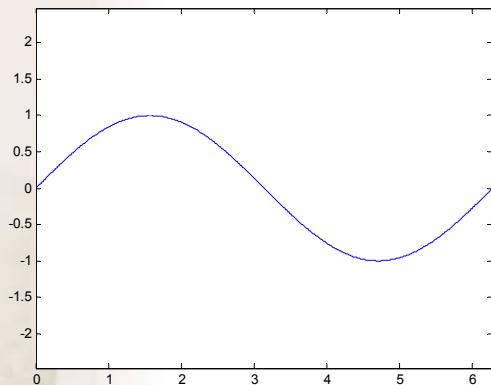
- ☑ **Reálný signál** je takový signál, který nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- ☑ **Komplexní signál** je takový signál, který nabývá komplexních hodnot. (Hypotetický, v praxi neměřitelný.)

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Čas  $t$  je spojitý nebo diskrétní.

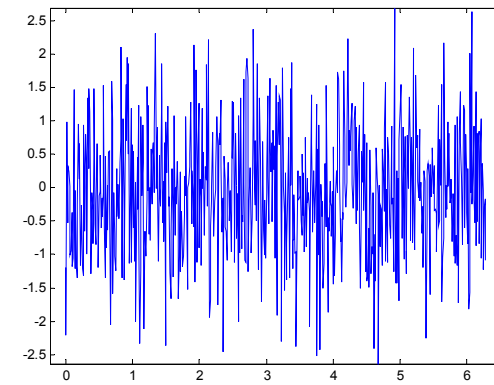
# C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

- ☑ **Deterministický signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Takovýto signál může být tedy popsán analytickou funkcí času  $t$ .
- ☑ **Náhodný (stochastický) signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.



$$x(t) = \sin t$$

$$N(0,1)$$



## C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

- ✓ **Náhodný (stochastický) signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

# C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

**Náhodný (stochastický) signál (veličina)** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

## **Náhodný proces**

System  $\{\xi_i\}$  náhodných veličin  $\xi_i$ , definovaných pro všechna  $t \in \mathbb{R}$  se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se  $\xi(t)$ . Nezávislá veličina  $t$  je zpravidla čas.

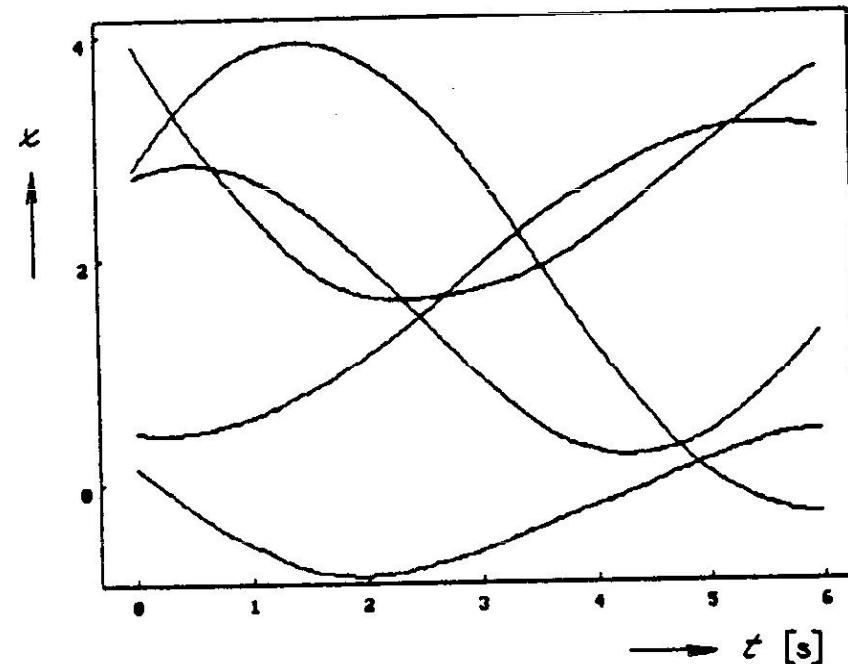
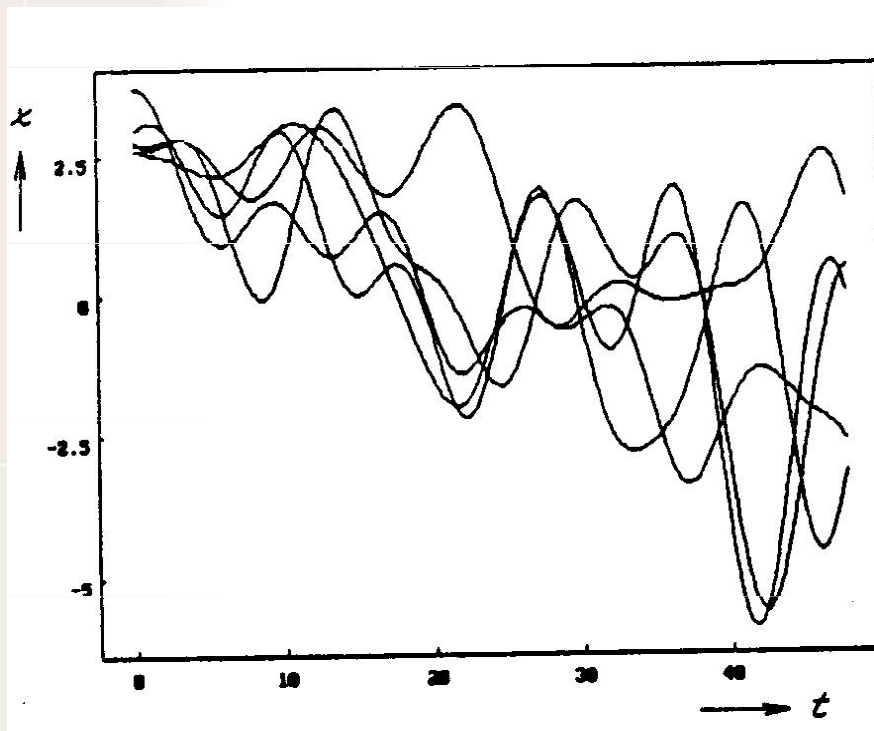
- ❖ stacionarita;
- ❖ ergodicita



# STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

**zhruba:**

- ☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním



# STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

## přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky  $t_1$  a  $t_2$ )

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

# ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

**Ergodický náhodný proces** (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejně chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

## D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY

- ☑ **Sudý signál** je takový, pro který platí

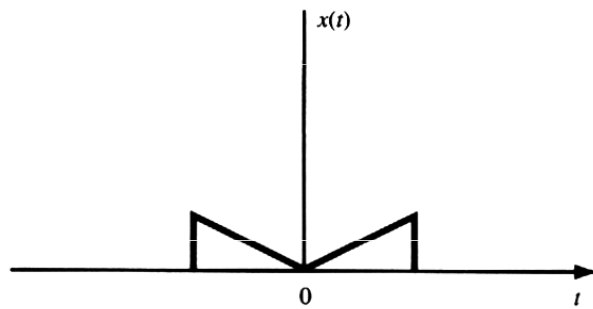
$$x(-t) = x(t), \quad X_{-n} = X_n$$

- **Lichý signál** je takový, pro který platí

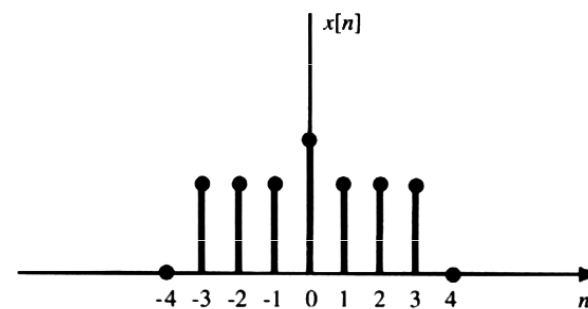
$$x(-t) = -x(t), \quad X_{-n} = -X_n$$

- Součin sudého a lichého signálu je lichý signál.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých signálů je sudý signál.

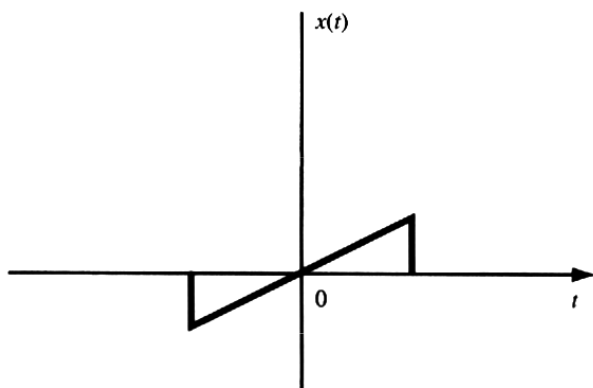
# D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY



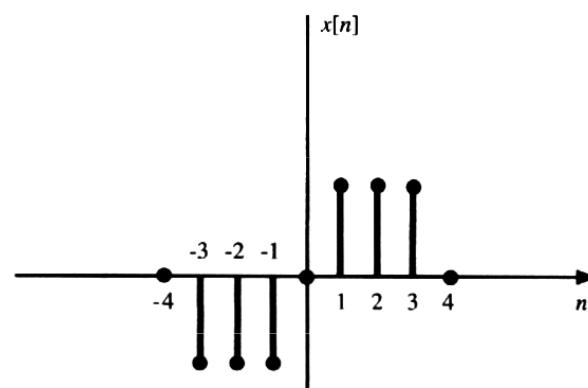
(a)



(b)



(c)



(d)

# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- ☑ Spojitý signál  $x(t)$  je **periodický s periodou  $T$** , jestliže existuje hodnota  $T$  taková, že pro všechna  $t$  platí

$$x(t + T) = x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota  $T$ , pro kterou platí uvedený vztah se nazývá **základní perioda**.
- Obecně lze psát

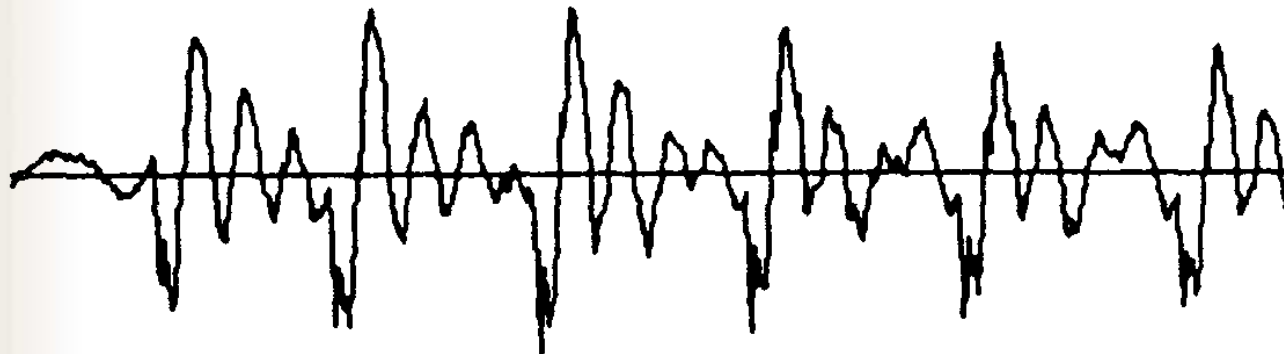
$$x(t + kT) = x(t),$$

kde  $k$  je celé číslo.

# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- ☑ **Pozor!** Pro konstantní signál není definována základní perioda. Konstantní signál je periodický pro každou hodnotu  $T$ .
- ☑ Spojitý signál, který není periodický se nazývá **neperiodický** nebo **aperiodický**.
- ☑ Reálné biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních signálech**.

**Pohov!**



řečový signál – samohláska „e“

# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- Pro diskretní signál definujeme periodický signál s periodou  $N$  obdobně

$$X_{n+N} = X_n \quad \text{a} \quad X_{n+kN} = X_n$$

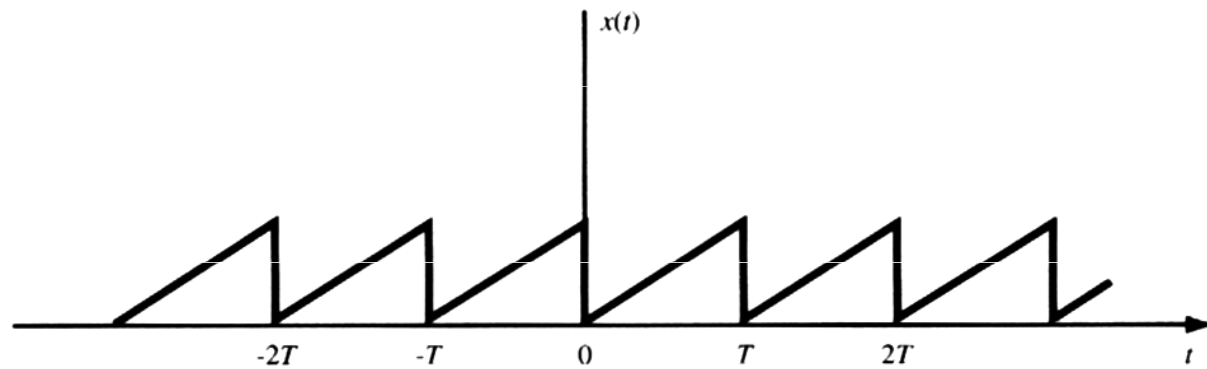
## Pozor!

- ☑ Diskretní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskretních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

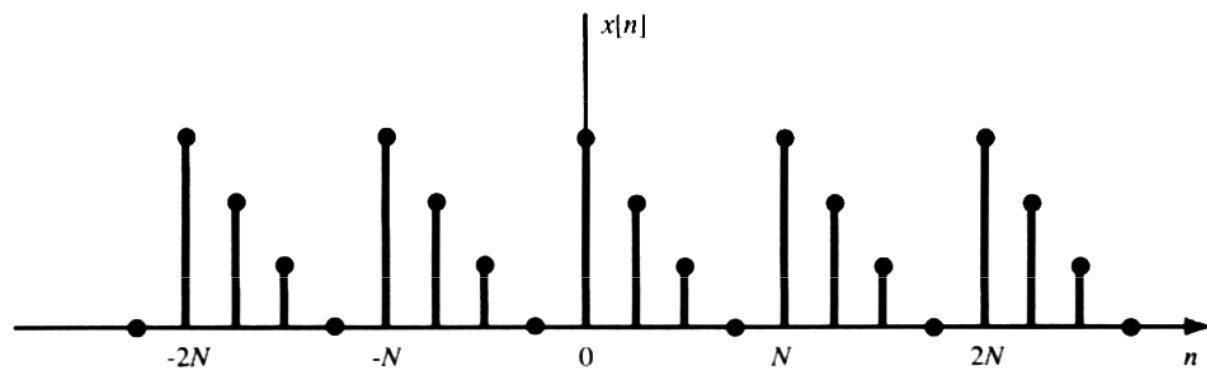
**Pohov!**



# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY



(a)



(b)

# SIGNÁLY SPOJITÉ V ČASE

# HARMONICKÝ SIGNÁL

---

# HARMONICKÁ FUNKCE

☑ **harmonický signál** je popsán funkcí

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$  je **amplituda** harmonické funkce

$\omega > 0$  je **úhlový kmitočet** h.f.

$\varphi_0$  je **počáteční fáze**, tj. fáze v čase  $t=0$

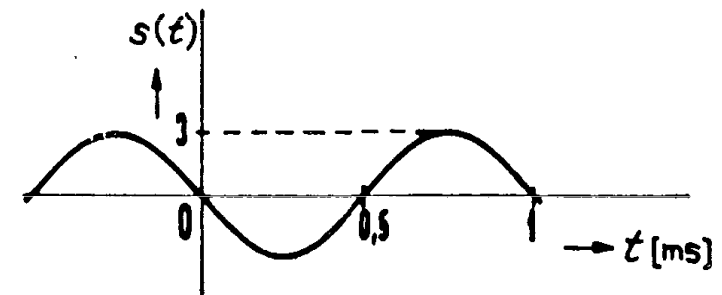
$\omega t + \varphi_0$  je **fáze** harmonické funkce

**Perioda** harmonické funkce je dána vztahem

$$T = 2\pi/\omega$$

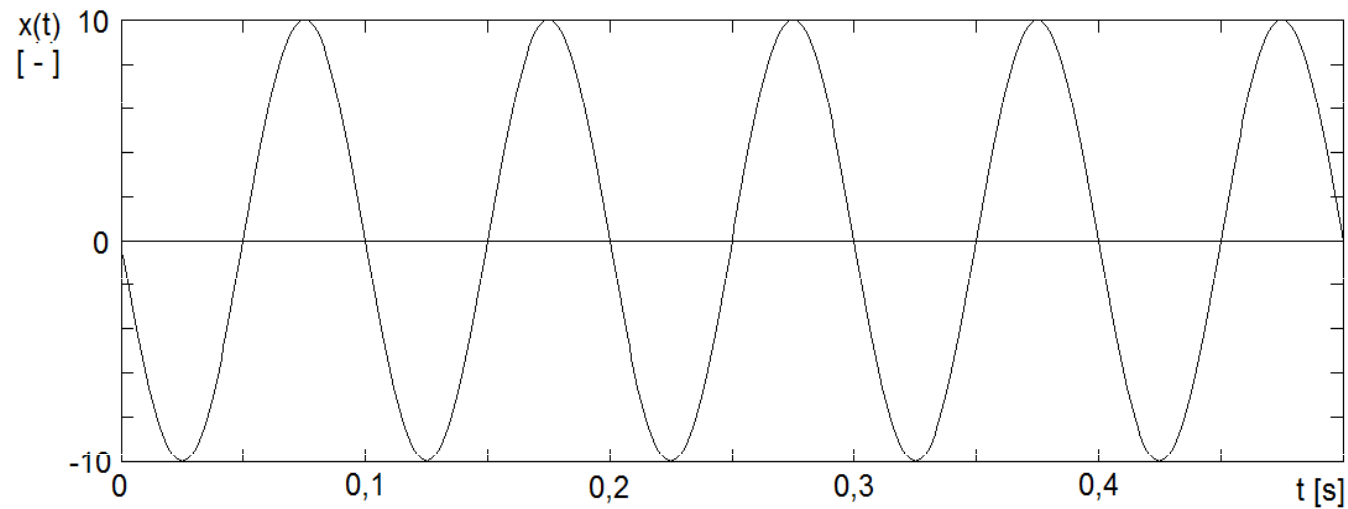
**kmitočet** h.f. je definován

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$



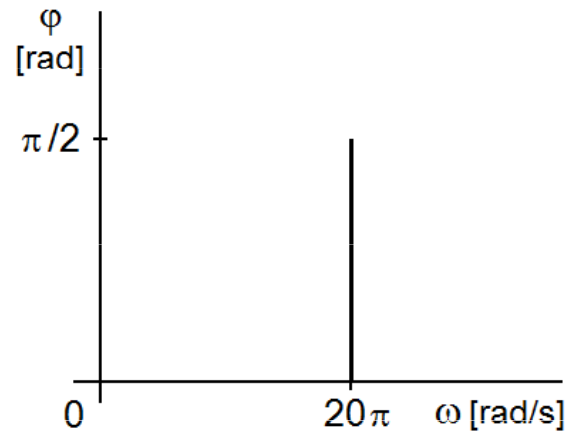
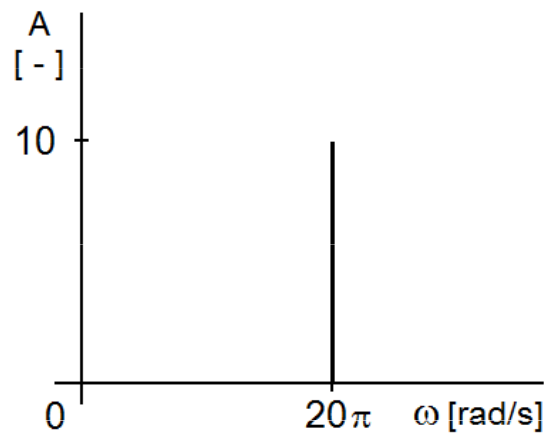
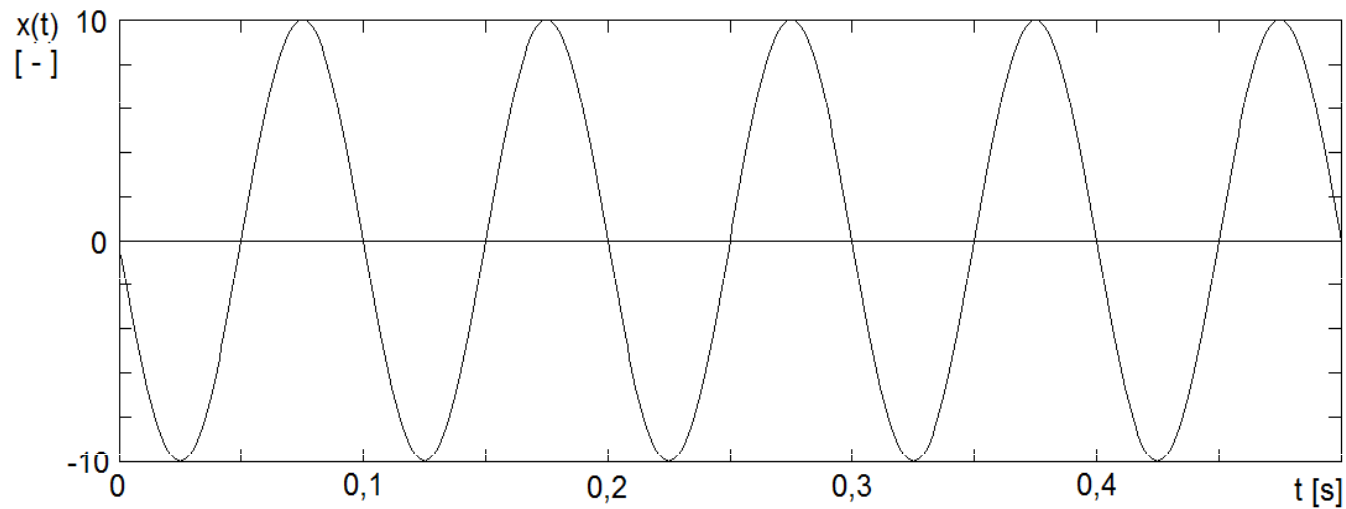
# HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$



# HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$



# HARMONICKÁ FUNKCE

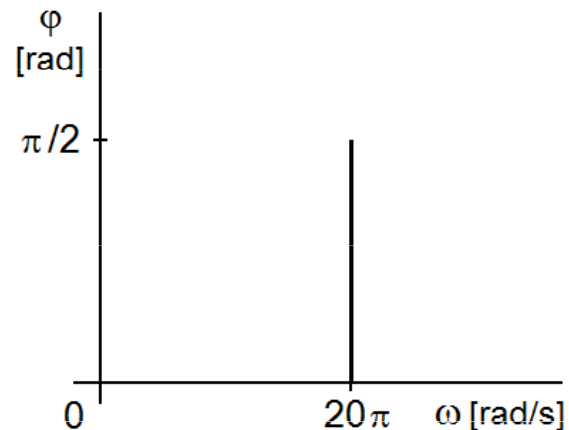
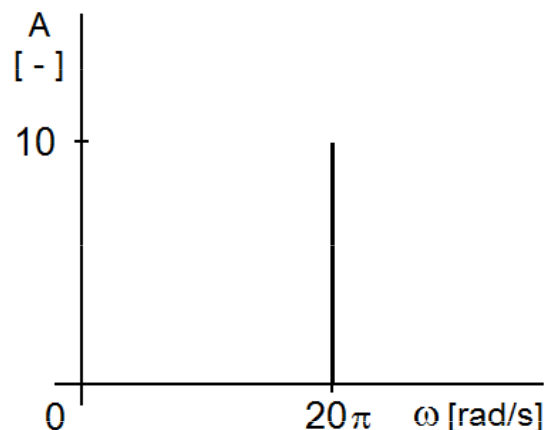
$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$

- ☑ tříparametrický harmonický signál lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda  $x$  (úhlový) kmitočet  $a$

počáteční fáze  $x$  (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad a \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$



**spektrum** amplitud

**spektrum** počátečních fází

# !!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



**Frekvenční spektrum** signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

**! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !**



# HARMONICKÝ SIGNÁL

☑ další definice

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(t)\} = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

# HARMONICKÝ SIGNÁL

kupodivu lze použít i vztah

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(t)\}$$

**pozor !!! pozor**

- záporný kmitočet - ale funguje to

# HARMONICKÝ SIGNÁL

Protože platí

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(t)\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(t)\} \text{ a } \operatorname{Im}\{\dot{x}(t)\} = -\operatorname{Im}\{\dot{x}^*(t)\}$$

je i

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)\}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \{A \cdot \exp(j\varphi_0) \cdot \exp(j\omega t)\} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \{A \exp(-j\varphi_0) \cdot \exp(-j\omega t)\}$$

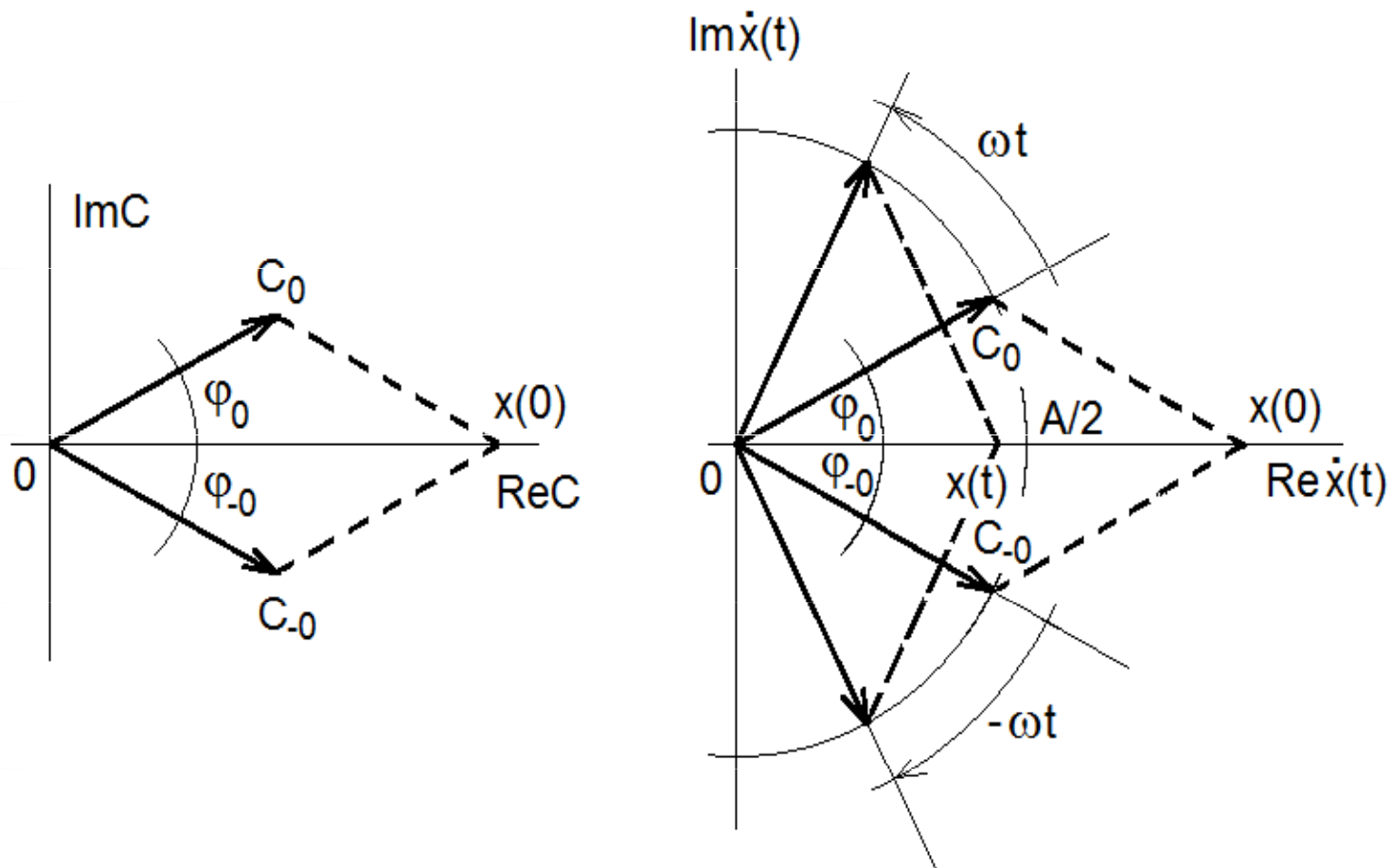
Označíme-li

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \exp(j\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-1} = \frac{1}{2} \cdot A \exp(-j\varphi_0)$$

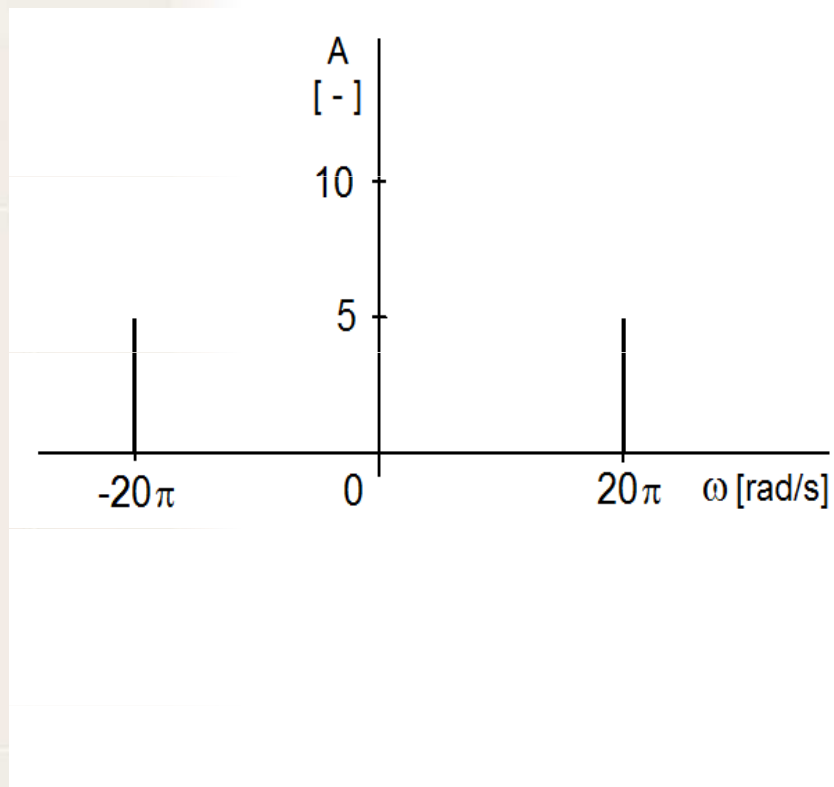
je

$$x(t) = \dot{C}_1 \cdot \exp(j\omega t) + \dot{C}_{-1} \cdot \exp[j(-\omega)t]$$

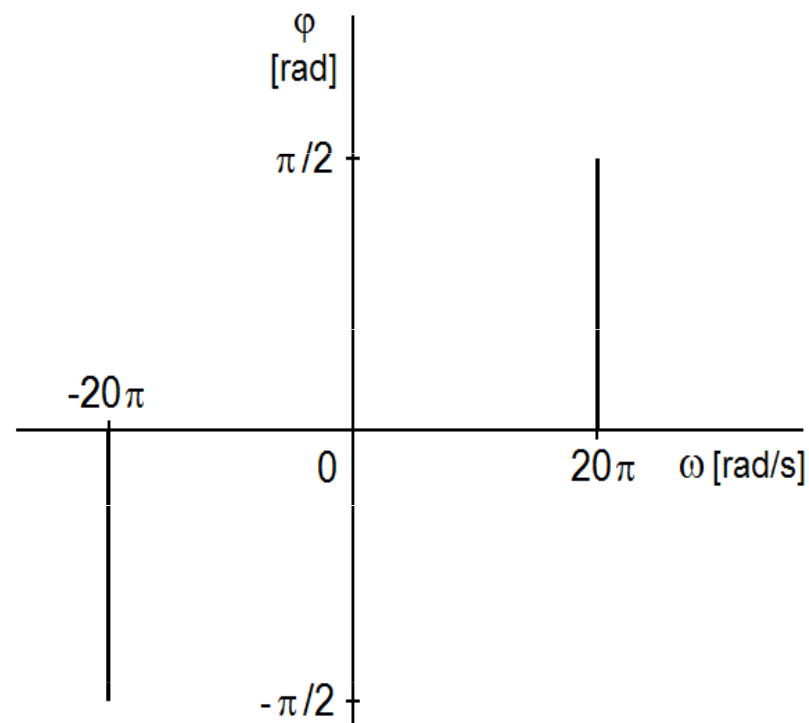
# HARMONICKÝ SIGNÁL



# HARMONICKÝ SIGNÁL



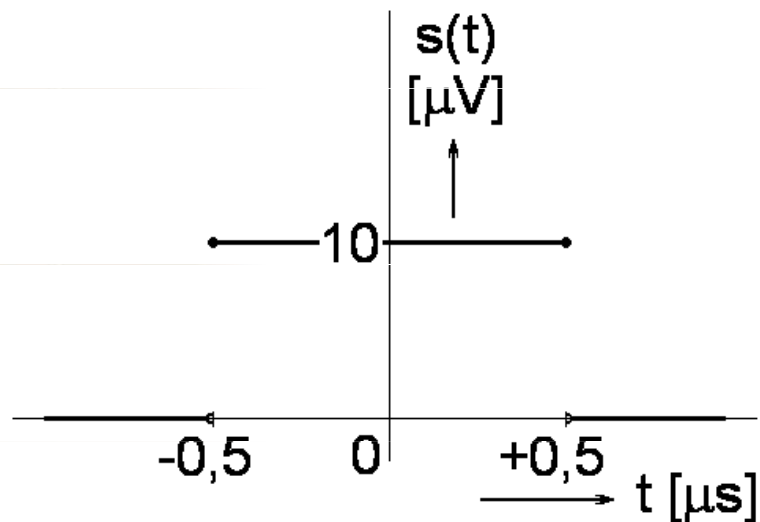
**spektrum** amplitud



**spektrum** počátečních fází

# NEPERIODICKÉ FUNKCE

## ☑ jednorázový deterministický signál



$$s(t) = 10 \cdot 10^{-6} \text{ V pro } t \in \langle -0,5 \mu\text{s}; 0,5 \mu\text{s} \rangle$$

$$s(t) = 0 \text{ V pro } t \in (0,5 \mu\text{s}; \infty \rangle$$

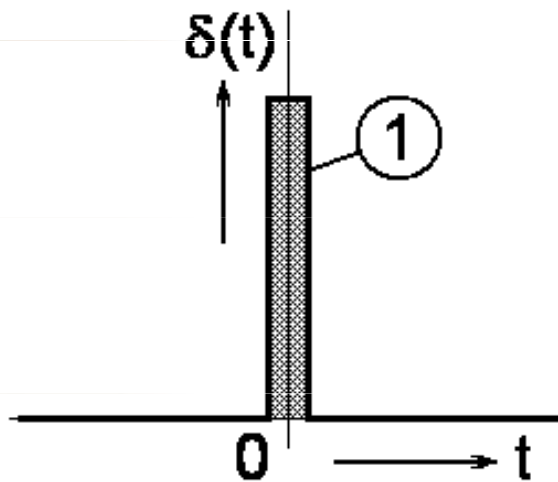
$$s(t) = 0 \text{ V pro } t \in \langle -\infty; -0,5 \mu\text{s} \rangle$$

# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$



**zjednodušeně:**

jednotkový impuls  $\delta(t)$  je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky  $\Rightarrow$  **mohutnost** je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

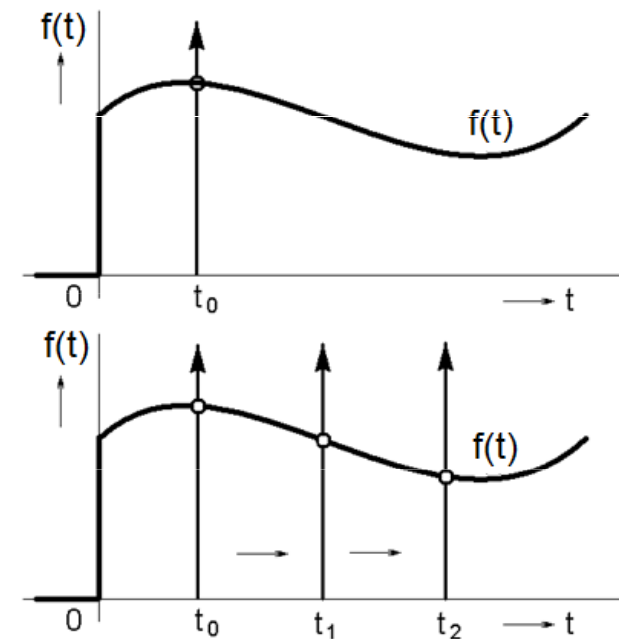
☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t - t_0) dt =$$

$$= f(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$





# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

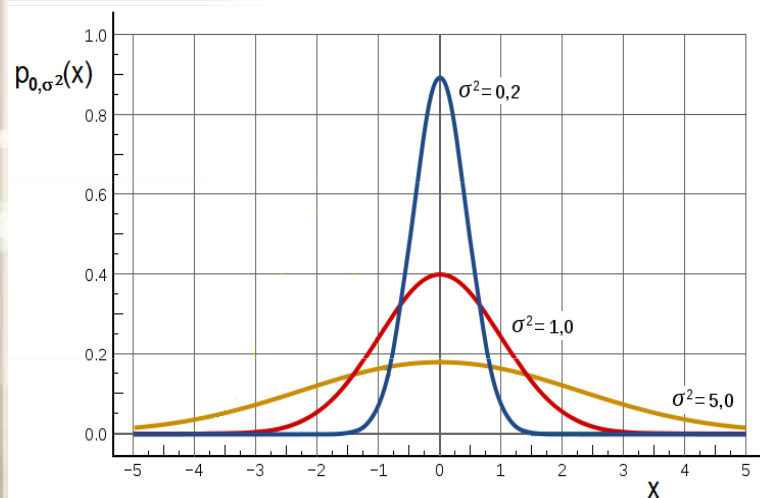
☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

**zjednodušeně:**

jednotkový impuls  $\delta(t)$  je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky  $\Rightarrow$  **mohutnost** je jednotková

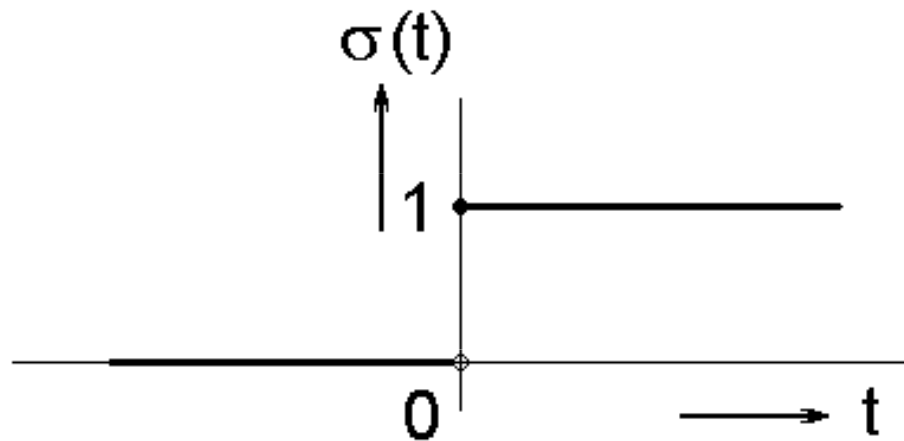


$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ pro obě uvedené jednorázové funkce platí:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t)$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

# JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitá výkon  $p(t)$  v čase  $t$ , vykonaný na reálném odporu  $R$  je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Podle Ohmova zákona je

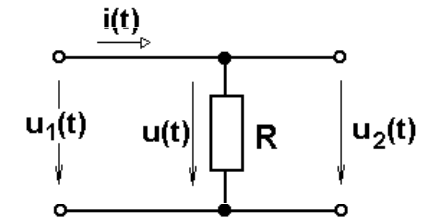
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = u(t) \cdot u(t) / R = u^2(t) / R.$$

Když je  $R = 1 \Omega$ , se vztah zjednoduší na

$$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$



# JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas  $T$  na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitého signálu  $x(t)$  vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní signál  $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

# JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE & VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho  $P_s = \frac{1}{T} \int x^2(t) dt$  a  $P_d = \frac{1}{NT_{vz}} \sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N} \sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int x^2(t) dt \quad a \quad P_{d\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_{vz}} \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

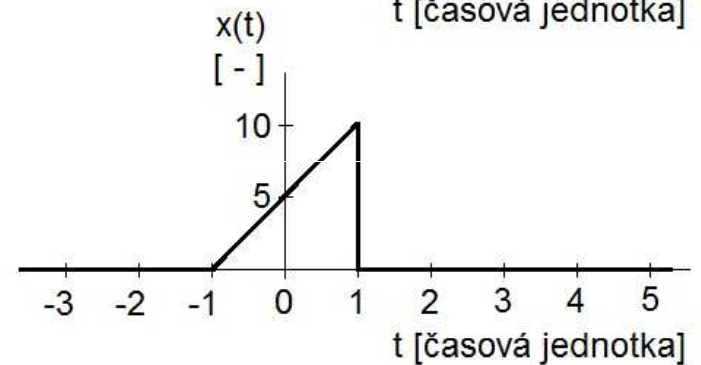
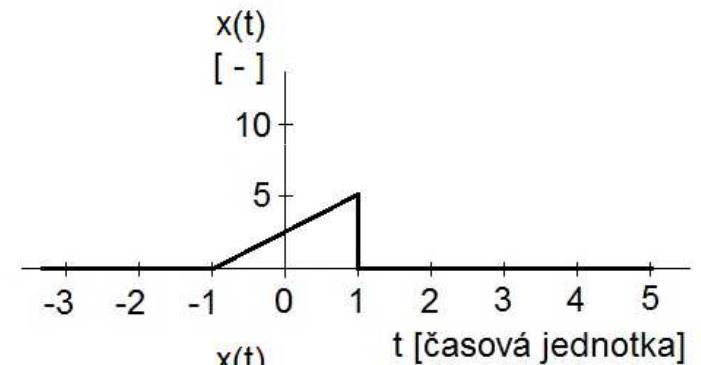
$$P_{dn\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n^N x^2(n)$$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ✓ násobení konstantou

$$x(t) \sim A \cdot x(t),$$



$$A=2$$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde  $m$  je kladné reálné číslo

$m > 1$  – časová komprese;

$m < 1$  – časová expanze

$m = 1$  – nic se neděje



# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ změna časového měřítka

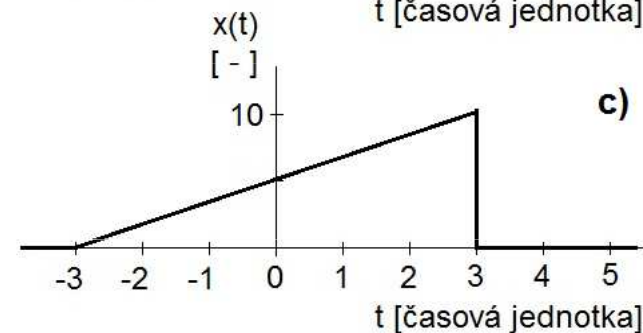
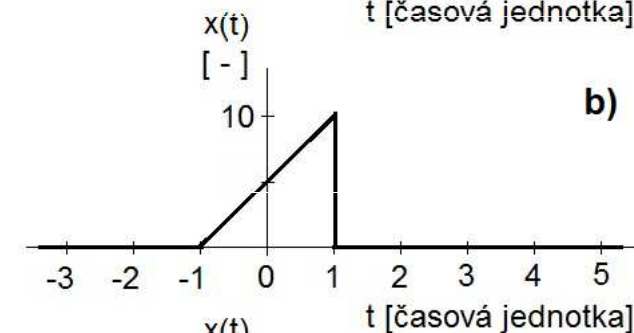
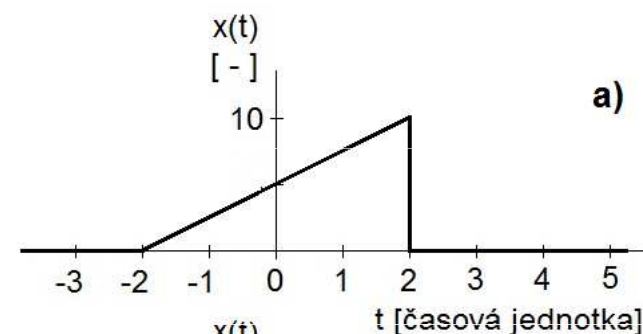
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde  $m$  je kladné reálné číslo

$m > 1$  – časová komprese;

$m < 1$  – časová expanze

$m = 1$  – nic se neděje



a) originál; b)  $k=2$ ; c)  $k=2/3$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ☑ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$  je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0 - ?$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

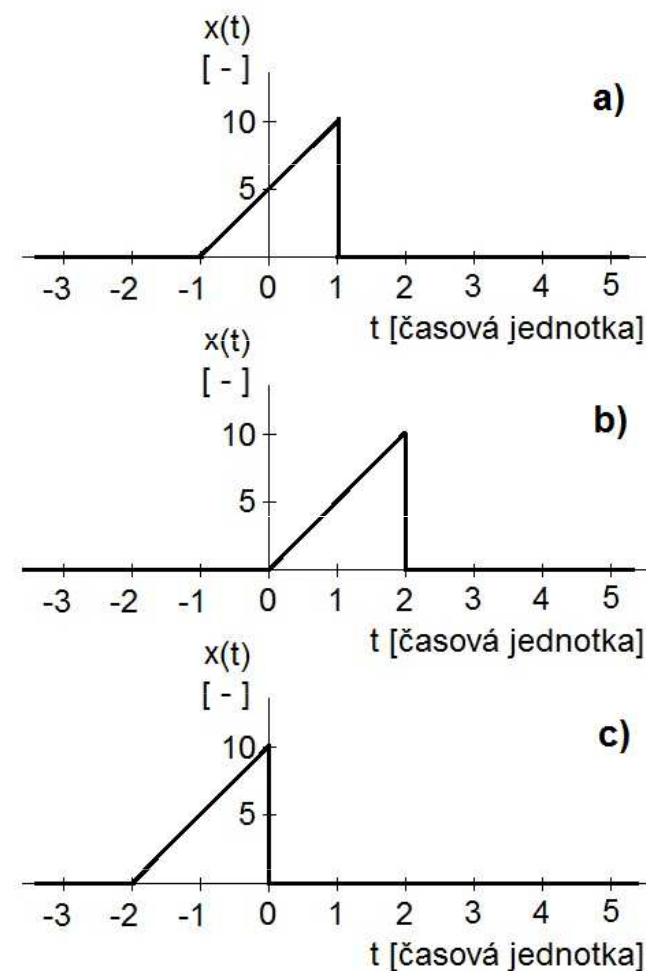
## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ✓ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$  je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$  – zpoždění



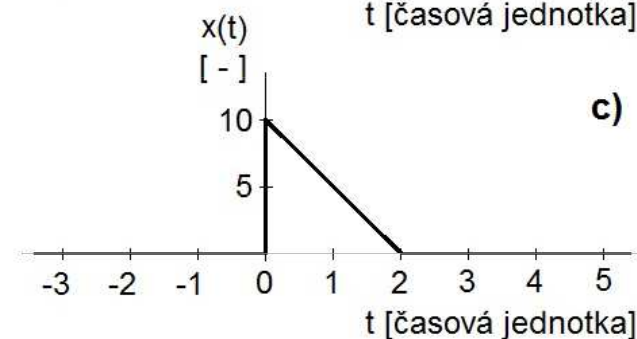
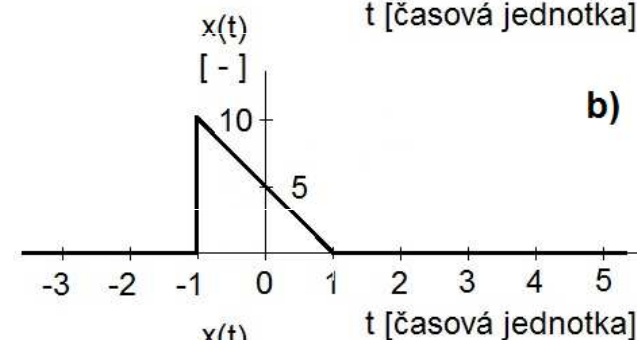
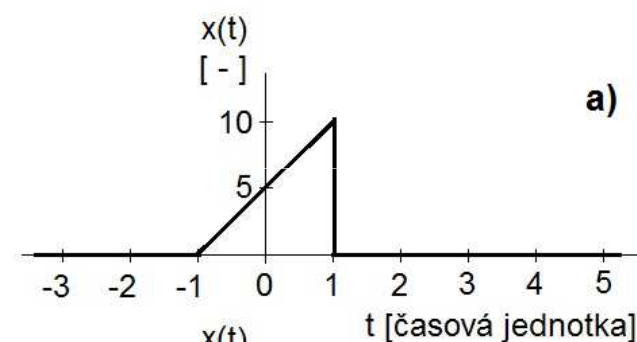
a) originál  $x(t)$ ; b) funkce  $x(t-1)$ ; c) funkce  $x(t+1)$ ;

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

## OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

### ✓ obrácení (inverze) časové osy

$$x(t) \sim x(-t) ,$$



a) originál  $x(t)$ ; b) funkce  $x(-t)$ ; c) funkce  $x(-t-1)$

# SHRNUTÍ

- ✓ Jaké typy signálů známe (dle vlastností)?
- ✓ Stacionarita, ergodicita
- ✓ Definice základních signálů (jednotkový skok, impuls, harmonický signál)
- ✓ Různé formy vyjádření harmonického signálu
- ✓ Co je frekvenční spektrum?
- ✓ Základní operace se signály