



# SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz), UKB A29, přízemí, dv.č.112



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# IX. Z TRANSFORMACE SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

# Z TRANSFORMACE

## definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp(-jk\omega T_{vz}),$$

$X(\omega)$  je obecně komplexní funkce proměnné  $\omega$  - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp(j\omega T_{vz})^{-k},$$

je-li  $z = \exp(j\omega T)$ , dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot z^{-k}, \quad \text{oboustranná Z-transformace}$$

# Z TRANSFORMACE

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot z^{-k}, \quad \text{jednostranná Z-transformace}$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz})) = 1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz} - nT_{vz})) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(kT_{vz} - nT_{vz}) \cdot z^{-k} = \Delta(0T_{vz}) \cdot z^{-n} = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

# Z TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

vynásobíme-li obě strany  $(z-1)$  dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots) - (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

# VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

## Linearita

$$a.x(k) + b.y(k) \sim a.X(z) + b.Y(z)$$

## Posun vpravo $x(k).u(k)$

$$x(k-n).u(k-n) \sim z^{-n}X(z)$$

## Posun vpravo $x(k)$

$$x(k-1) \sim z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}.x(-1)$$

⋮

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z) + x(-n) + z^{-1}.x(-n+1) + \dots + z^{-n+1}.x(-1)$$

Je-li  $x(m) = 0$  pro  $m = -1, -2, \dots, -n$ , je

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z),$$

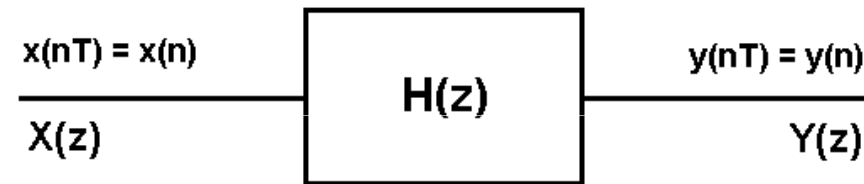
což je totéž jako pro  $x(k-n).u(k-n)$ .

## Konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(i) \cdot y(n-i) \approx X(z) \cdot Y(z)$$

# SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

## PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$y(nT_{vz}) = h(nT_{vz}) * x(nT_{vz})$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$H(z) = Y(z)/X(z)$ , kde  $H(z)$  je racionální lomená funkce proměnné  $z^{-1}$  (**obrazová přenosová funkce**)

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



# SYSTEMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

## NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = A \cdot \frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^n (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^m (z - z_{pi})}$$

A – zesílení;  $z_{ni}$  ... nulové body;  $z_{pi}$  ... póly

# SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

## DIFERENČNÍ ROVNICE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_n z^{-m} + b_{n-1} z^{-m+1} + b_{n-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + b_{n-2} z^{-n+2} + \dots + b_0) \cdot Y(z) = \\ = (a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0) \cdot X(z)$$

$$b_m Y(z) \cdot z^{-m} + b_{m-1} Y(z) \cdot z^{-m+1} + b_{m-2} Y(z) \cdot z^{-m+2} + \dots + b_0 \cdot Y(z) = \\ = a_n X(z) \cdot z^{-n} + a_{n-1} X(z) \cdot z^{-n+1} + a_{n-2} X(z) \cdot z^{-n+2} + \dots + a_0 \cdot X(z)$$

**!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!**

$$b_m y(iT_{vz} - mT_{vz}) + b_{m-1} y(iT_{vz} - mT_{vz} + T_{vz}) + b_{m-2} y(iT_{vz} - mT_{vz} + 2T_{vz}) + \dots + b_0 y(iT_{vz}) = \\ = a_n x(iT_{vz} - nT_{vz}) + a_{n-1} x(iT_{vz} - nT_{vz} + T_{vz}) + a_{n-2} x(iT_{vz} - nT_{vz} + 2T_{vz}) + \dots + a_0 x(iT_{vz}) \\ y(iT_{vz}) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_0} \cdot x(iT_{vz} - kT_{vz}) - \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{b_0} \cdot y(iT_{vz} - kT_{vz})$$

diferenční rovnice

# SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

## FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}$$

$$z = \exp(j\omega T_{vz})$$

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T_{vz}} + a_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + a_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + a_m e^{j\omega 0 T_{vz}}}{b_0 e^{j\omega m T_{vz}} + b_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + b_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + b_m e^{j\omega 0 T_{vz}}}$$

# SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

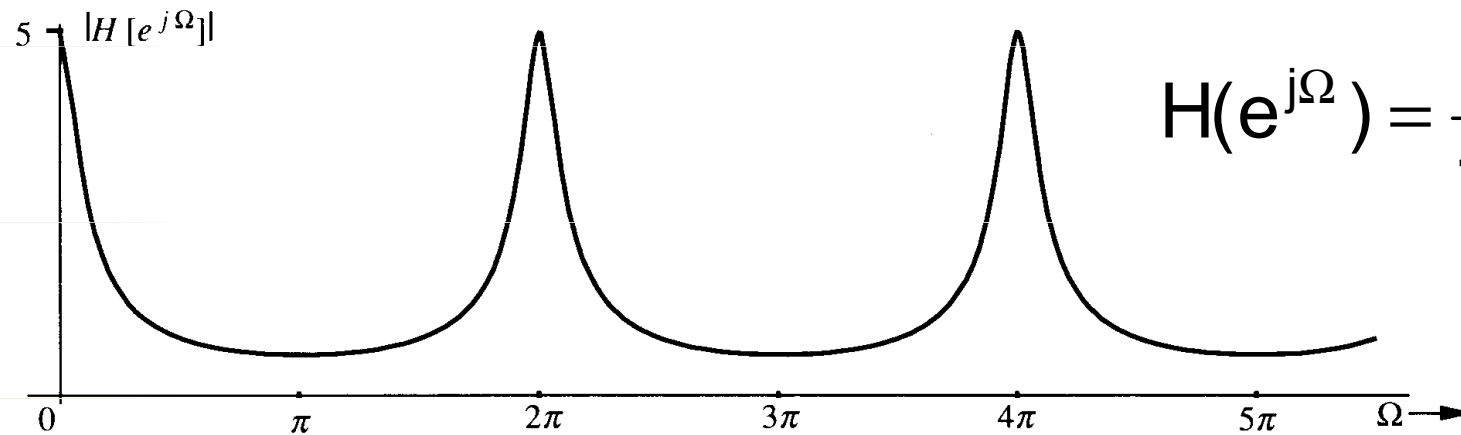
## FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T_{vz}} + a_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + a_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + a_m e^{j\omega 0 T_{vz}}}{b_0 e^{j\omega m T_{vz}} + b_1 e^{j\omega(m-1)T_{vz}} + b_2 e^{j\omega(m-2)T_{vz}} + \dots + b_m e^{j\omega 0 T_{vz}}}$$

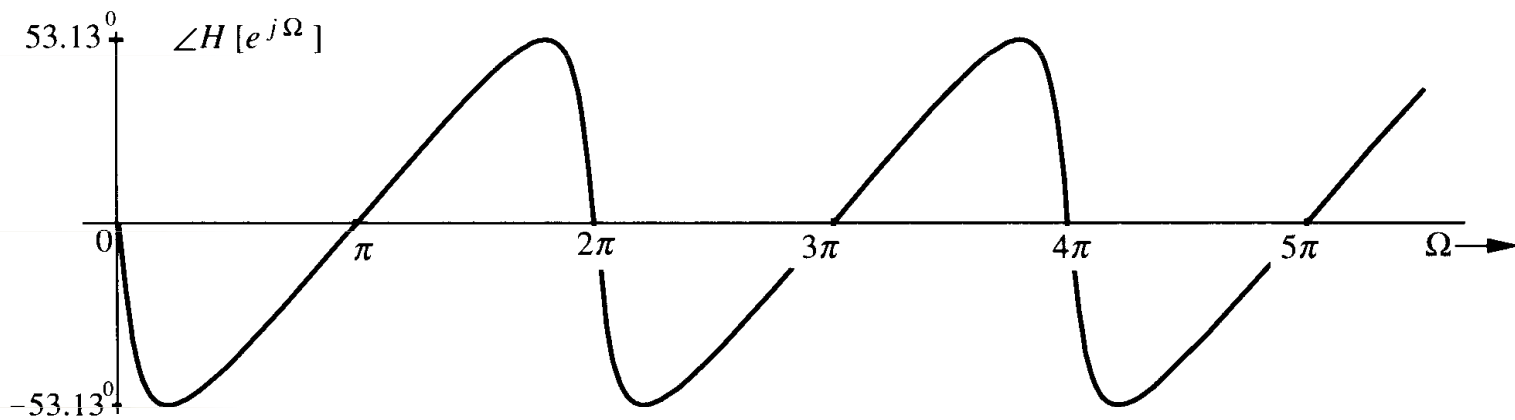
$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\phi}$$

# SYSTEMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

## FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0,8 \cdot e^{-j\Omega}}$$



# VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

## IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

### operátorová přenosová funkce

$$H(p) = Y(p)/X(p)$$

$$H(z) = Y(z)/X(z)$$

$$Y(p) = H(p).X(p)$$

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t - \tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(i).y(n - i) \approx X(z).Y(z)$$

# VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

## IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že  $X(z) = 1$  máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

# VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

## IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že  $X(z) = 1$  máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz})) = 1$$



# VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

## IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z) \cdot \mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz})))$$

odezva na jednotkový impuls -  
- impulsová charakteristika

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p) \cdot \mathcal{L}(\delta(t)))$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t) * \mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy (Z) transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenosová funkce tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

# VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

## IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li  $h(t) = 0$  pro  $t > t_0$  ( $h(kT_{vz}) = 0$  pro  $k > k_0$ ) hovoříme o **systemu s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR)**;
- ☑ není-li  $h(t) = 0$  pro  $t > t_0$  ( $h(kT_{vz}) = 0$  pro  $k > k_0$ ) hovoříme o **systemu s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR)**;

# VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

## PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$$\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$$

$$Y(p) = G(p) = H(p) \cdot \mathcal{L}(\sigma(t)) = H(p) \cdot 1/p$$

$$\mathcal{Z}(u(kT_{vz})) = 1/1-z^{-1} = z/(z-1)$$

$$Y(z) = G(z) = H(z) \cdot z/(z-1)$$

# VNITŘNÍ STAVOVÝ POPIS

Dynamika není vyjádřena derivací stavových proměnných, ale jejich hodnotami v následujícím časovém kroku.

$$\begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \\ \vdots \\ s_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(k),$$

kde  $\mathbf{s}(k+1) = (s_1(k+1), s_2(k+1), \dots, s_n(k+1))^T$  je vektor hodnot stavových veličin v čase  $k+1$ ,  $\mathbf{s}(k)$  je vektor hodnot stavových veličin v čase  $k$  a vektor  $\mathbf{x}(k)$  představuje hodnoty vstupních posloupností v čase  $k$ . Matice  $\mathbf{A}(n,n)$  je **matice dynamiky systému** a její (v případě lineárních, časově invariantních systémů konstantní) prvky vyjadřují vztah mezi hodnotami stavových veličin v čase  $k+1$  a  $k$ . Matice  $\mathbf{B}(n,m)$  je tzv. **vstupní matice systému** a popisuje vzájemný vztah mezi hodnotami stavových veličin v čase  $k+1$  a hodnotami vstupních veličin v čase  $k$ .

# VNITŘNÍ STAVOVÝ POPIS

Podobně jako u spojitéch systémů informaci o ději uvnitř systému získáváme prostřednictvím hodnot výstupních veličin, které určujeme pomocí druhé stavové rovnice, kterou píšeme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}(k),$$

kde kromě již výše popsaných symbolů  $\mathbf{y}(k) = (y_1(k), y_2(k), \dots, y_r(k))^T$  je vektor hodnot výstupní posloupnosti v čase  $k$ , matice  $\mathbf{C}(r,n)$  matice popisující vliv stavu systému na výstup a matice  $\mathbf{D}(r,m)$  je **matice přímých vstupně-výstupních vazeb**.