Numerické výpočty metodami konečných diferencí
Podzimní astronomický kurs,
10.-14. září 2012, Vyškov

Petr Kurfürst

Ústav teoretické fyziky and astrofyziky
Masarykova Univerzita, Brno

September 12, 2012

Hydrodynamika - podstatná část astrofyziky

Popis kinematiky a dynamiky tekutin v souvislosti s působením vnějších i vnitřních sil:

- Rovnice kontinuity (zákon zachování hmotnosti)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0$$

- Pohybová rovnice (zákon zachování hybnosti, momentu hybnosti)

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} \quad (+\vec{f}_{visc} \ldots .)$$

- Rovnice energie

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \epsilon \vec{v} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \ldots .$$

- Stavové rovnice

$$p = \rho a^2, \ \text{atd.}$$

Principy konečných diferencí

- Jednoduchý příklad - 1-D transportní rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Principy konečných diferencí

- Jednoduchý příklad - 1-D transportní rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- Numerická reprezentace f na diskrétní síti:

$$x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_N \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N)$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t,\; t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t,\; \dots,\; t_n = t_0 + n\Delta t$$

Principy konečných diferencí

- Jednoduchý příklad - 1-D transportní rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- Numerická reprezentace f na diskrétní síti:

$$x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_N \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N)$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t,\ t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t,\ \dots,\ t_n = t_0 + n\Delta t$$

- Numerické řešení veličiny f $(x = x_j,\ t = t_n)$ označíme f_j^n.

Principy konečných diferencí

- Jednoduchý příklad - 1-D transportní rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- Numerická reprezentace f na diskrétní síti:

$$x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_N \qquad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N)$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t,\ t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t,\ \dots,\ t_n = t_0 + n\Delta t$$

- Numerické řešení veličiny f $(x = x_j,\ t = t_n)$ označíme f_j^n.

- Taylorův rozvoj f:

$$f(x+h,t) = f(x,t) + h\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3) + \dots$$

$$f(x-h,t) = f(x,t) - h\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \mathcal{O}(h^3) + \dots$$

Principy konečných diferencí

- Typy diferencí pro aproximace derivací 1. řádu:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n \cong (f_{j+1}^n - f_j^n)/\Delta x \qquad \text{dopředné diference}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n \cong (f_j^n - f_{j-1}^n)/\Delta x \qquad \text{zpětné diference}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n \cong (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)/2\Delta x \qquad \text{centrální diference}$$

Principy konečných diferencí

- Typy diferencí pro aproximace derivací 1. řádu:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n \cong (f_{j+1}^n - f_j^n)/\Delta x \qquad \text{dopředné diference}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n \cong (f_j^n - f_{j-1}^n)/\Delta x \qquad \text{zpětné diference}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n \cong (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)/2\Delta x \qquad \text{centrální diference}$$

- Příklad diferenčního schematu pro aproximace derivací 2. řádu:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_j^n \cong (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)/(\Delta x)^2$$

Principy konečných diferencí

- Diferenční schema uvedené transportní (advekční) rovnice:

$$\frac{(f_j^{n+1} - f_j^n)}{\Delta t} = -u\frac{(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)}{2\Delta x}$$

- časový člen - dopředná diference, advekční člen - centrální diference

Principy konečných diferencí

- Diferenční schema uvedené transportní (advekční) rovnice:

$$\frac{(f_j^{n+1} - f_j^n)}{\Delta t} = -u\frac{(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)}{2\Delta x}$$

- časový člen - dopředná diference, advekční člen - centrální diference
- Po jednoduché úpravě dostáváme diferenční rovnici:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

Principy konečných diferencí

- Diferenční schema uvedené transportní (advekční) rovnice:

$$\frac{(f_j^{n+1} - f_j^n)}{\Delta t} = -u \frac{(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)}{2\Delta x}$$

- časový člen - dopředná diference, advekční člen - centrální diference
- Po jednoduché úpravě dostáváme diferenční rovnici:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

- Jak můžeme výpočet této rovnice naprogramovat?

Principy konečných diferencí

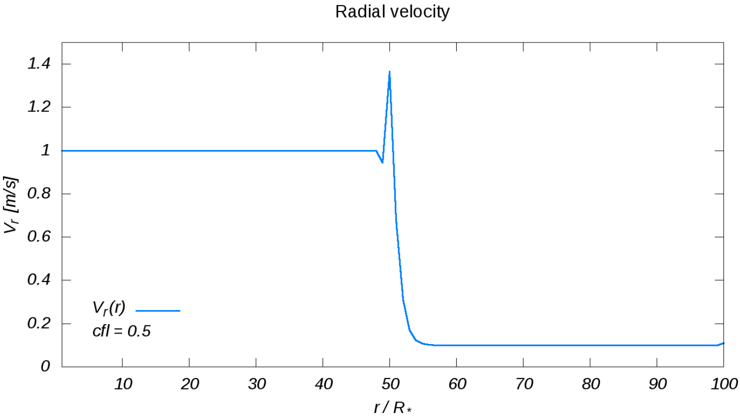
```
program explicit

integer i, ni, t, dt
parameter (ni = 100)
double precision x(ni), u(ni), f(ni)
parameter (dt = 1.d0, u = 1.2d0)

do i = 1,ni
   x(i) = dfloat(i)
   if (i.le.ni/2) then
   f(i) = 1.d0
   else
   f(i) = 0.1d0
   endif
end do
```

Principy konečných diferencí

```
t = 0.d0
do
  t = t+dt
  do i = 2,ni-1
    f(i) = f(i) - u(i) * dt * (f(i+1) - f(i-1)) / (x(i+1) - x(i-1))
  end do
  f(1) = f(1)
  f(ni) = f(ni-1)

  do i = 1,ni
  write (100,*) x(i), f(i)
  end do
  write (100,*)
  write (100,*)

  if (t.gt.200) exit
end do

end program explicit
```

Principy konečných diferencí

Ale: toto jednoduché a přehledné (tzv. explicitní) schema je bohužel vždy numericky nestabilní:



von Neumannova analýza stability

- Předpokládejme poruchy stability (periodické perturbace, vibrace) vlnového charakteru ve tvaru

$$\xi^n e^{i\,k\,j\,\Delta x},$$

kde $\xi(k)$ je amplituda vlny, k je vlnové číslo libovolné hodnoty.

von Neumannova analýza stability

- Předpokládejme poruchy stability (periodické perturbace, vibrace) vlnového charakteru ve tvaru

$$\xi^n e^{i\,k\,j\,\Delta x},$$

kde $\xi(k)$ je amplituda vlny, k je vlnové číslo libovolné hodnoty.

- Pokud $|\xi| > 1$, pro $n \to \infty$ bude $|\xi|^n \to \infty$, schema je nestabilní.
- Pokud $|\xi| < 1$, schema je stabilní.

von Neumannova analýza stability

- Předpokládejme poruchy stability (periodické perturbace, vibrace) vlnového charakteru ve tvaru

$$\xi^n e^{i\,k\,j\,\Delta x},$$

kde $\xi(k)$ je amplituda vlny, k je vlnové číslo libovolné hodnoty.

- Pokud $|\xi| > 1$, pro $n \to \infty$ bude $|\xi|^n \to \infty$, schema je nestabilní.
- Pokud $|\xi| < 1$, schema je stabilní.

- Po dosazení poruchové vlnové funkce do explicitního řešení dostáváme

$$(\xi^{n+1} - \xi^n)e^{i\,k\,j\,\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\xi^n(e^{i\,k\,(j+1)\,\Delta x} - e^{i\,k\,(j-1)\,\Delta x}),$$

von Neumannova analýza stability

- Předpokládejme poruchy stability (periodické perturbace, vibrace) vlnového charakteru ve tvaru

$$\xi^n e^{i\,k\,j\,\Delta x},$$

kde $\xi(k)$ je amplituda vlny, k je vlnové číslo libovolné hodnoty.

- Pokud $|\xi| > 1$, pro $n \to \infty$ bude $|\xi|^n \to \infty$, schema je nestabilní.
- Pokud $|\xi| < 1$, schema je stabilní.

- Po dosazení poruchové vlnové funkce do explicitního řešení dostáváme

$$(\xi^{n+1} - \xi^n)e^{i\,k\,j\,\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\xi^n(e^{i\,k\,(j+1)\,\Delta x} - e^{i\,k\,(j-1)\,\Delta x}),$$

- po vydělení $\xi^n e^{i\,k\,j\,\Delta x}$:

$$\xi = 1 - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(e^{i\,k\,\Delta x} - e^{-i\,k\,\Delta x}),$$

von Neumannova analýza stability

- tedy

$$\xi = 1 - i\frac{u\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x.$$

von Neumannova analýza stability

- tedy

$$\xi = 1 - i\frac{u\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x.$$

- Protože $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, bude

$$|\xi|^2 = 1 + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k\Delta x.$$

von Neumannova analýza stability

- tedy

$$\xi = 1 - i\frac{u\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x.$$

- Protože $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, bude

$$|\xi|^2 = 1 + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k\Delta x.$$

- Je zřejmé, že v případě explicitního schematu musí vždy platit

$$|\xi| \geq 1,$$

toto schema je tedy vždy nestabilní.

Laxova metoda

- Člen f_j^n v explicitním řešení lze nahradit aritmetickým průměrem sousedních hodnot:

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává:

$$\xi = \cos k\Delta x - i\frac{u\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x,$$

$$|\xi|^2 = \cos^2 k\Delta x + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k\Delta x.$$

Laxova metoda

- Člen f_j^n v explicitním řešení lze nahradit aritmetickým průměrem sousedních hodnot:

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává:

$$\xi = \cos k\Delta x - i\frac{u\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x,$$

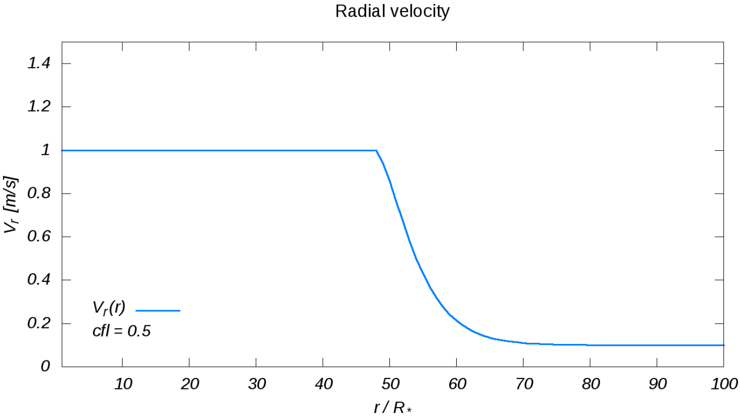
$$|\xi|^2 = \cos^2 k\Delta x + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k\Delta x.$$

- Schema je zjevně stabilní, pokud Courantovo číslo (Courant-Friedrichs-Levyho číslo - cfl)

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \qquad \text{(Courantův teorém stability)}.$$

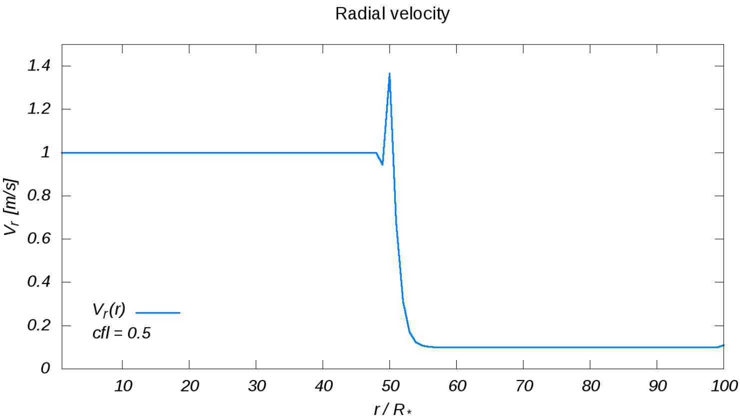
Laxova metoda

- Stejná rovnice, modelovaná Laxovou metodou:



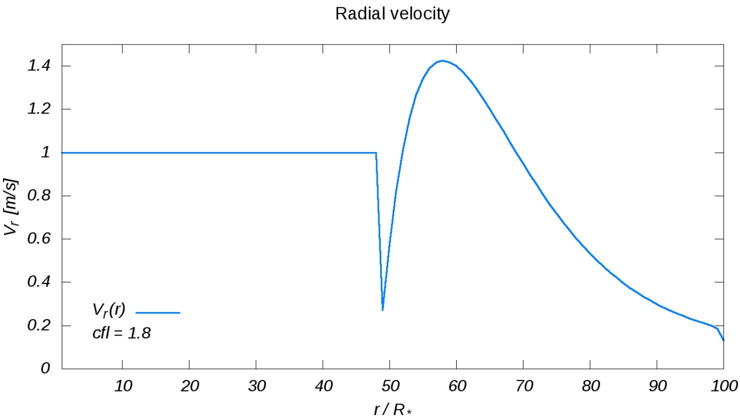
Laxova metoda

- Ještě jednou porovnání explicitních řešení s různými hodnotami Courantova čísla (cfl=0.5):



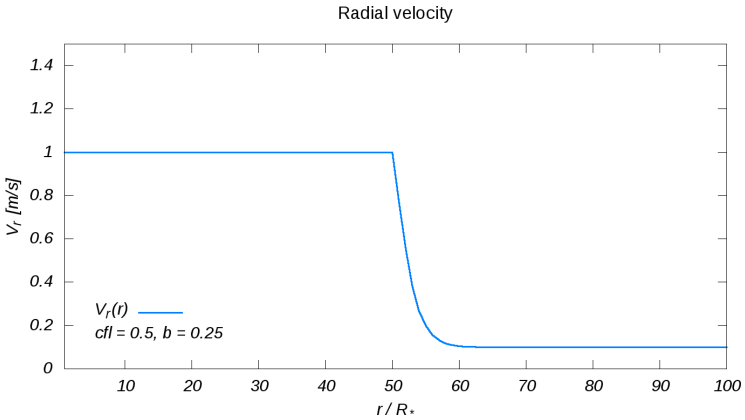
Laxova metoda

- Ještě jednou porovnání explicitních řešení s různými hodnotami Courantova čísla (cfl=1.8):



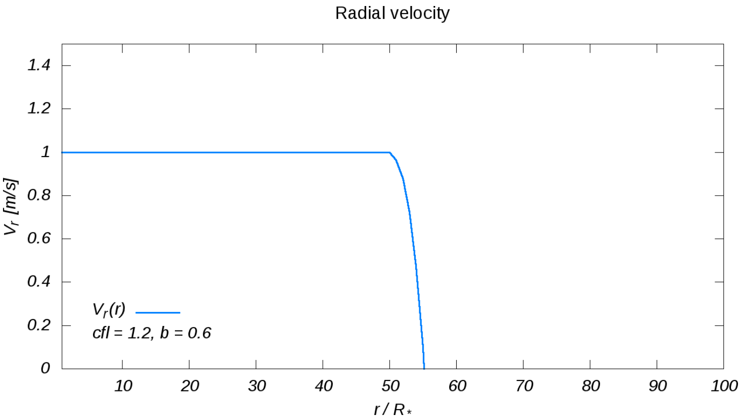
Laxova metoda

- Ještě jednou porovnání explicitních řešení s různými hodnotami Courantova čísla (cfl=0.5),
- stabilizace 2. derivací $b(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)$, $b = 0.25$ (totožné s Laxovou metodou):



Laxova metoda

- Ještě jednou porovnání explicitních řešení s různými hodnotami Courantova čísla (cfl=1.2),
- stabilizace 2. derivací $b(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)$, $b = 0.6$ (totožné s Laxovou metodou):



Metoda zpětného kroku (upwind method)

- V advekčním členu použijeme zpětnou diferenci:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_j^n - f_{j-1}^n)$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl=α):

$$\xi = 1 - \alpha + \alpha \cos k\Delta x - i\alpha \sin k\Delta x,$$

$$|\xi|^2 = (1 - \alpha + \alpha \cos k\Delta x)^2 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x,$$

Metoda zpětného kroku (upwind method)

- V advekčním členu použijeme zpětnou diferenci:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_j^n - f_{j-1}^n)$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl=α):

$$\xi = 1 - \alpha + \alpha \cos k\Delta x - i\alpha \sin k\Delta x,$$

$$|\xi|^2 = (1 - \alpha + \alpha \cos k\Delta x)^2 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x,$$

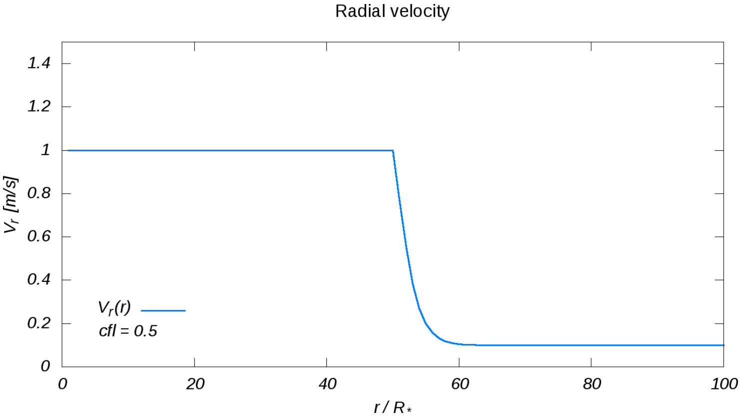
- Z požadavku $|\xi|^2 < 1$ vyplývá

$$2\alpha(1-\alpha)(1-\cos k\Delta x) > 0.$$

- Protože $\alpha > 0$, $\cos k\Delta x < 1$, schema bude stabilní, pokud opět Courantovo číslo $\alpha < 1$.

Metoda zpětného kroku (upwind method)

- Stejná rovnice, modelovaná metodou zpětného kroku:



Lax-Wendroffova metoda

- Dvoukroková metoda, kombinace Laxova a explicitního schematu.

Lax-Wendroffova metoda

- Dvoukroková metoda, kombinace Laxova a explicitního schematu.
- 1. krok (Laxův):

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^{n} + f_{j}^{n}) - \frac{1}{2}\frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^{n} - f_{j}^{n})$$

Lax-Wendroffova metoda

- Dvoukroková metoda, kombinace Laxova a explicitního schematu.
- 1. krok (Laxův):

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^{n} + f_{j}^{n}) - \frac{1}{2}\frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^{n} - f_{j}^{n})$$

- 2. krok (explicitní):

$$f_{j}^{n+1} = f_{j}^{n} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

Lax-Wendroffova metoda

- Dvoukroková metoda, kombinace Laxova a explicitního schematu.
- 1. krok (Laxův):

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2}\frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^n - f_j^n)$$

- 2. krok (explicitní):

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl=α):

$$\xi = 1 - 2\alpha \sin\frac{1}{2}k\Delta x(\alpha \sin\frac{1}{2}k\Delta x + i\cos\frac{1}{2}k\Delta x),$$

$$|\xi|^2 = 1 - 4\alpha^2\sin^2\frac{1}{2}k\Delta x(1 - \alpha^2\sin^2\frac{1}{2}k\Delta x - \cos^2\frac{1}{2}k\Delta x).$$

Lax-Wendroffova metoda

- Dvoukroková metoda, kombinace Laxova a explicitního schematu.
- 1. krok (Laxův):

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2}\frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^n - f_j^n)$$

- 2. krok (explicitní):

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x}(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl=α):

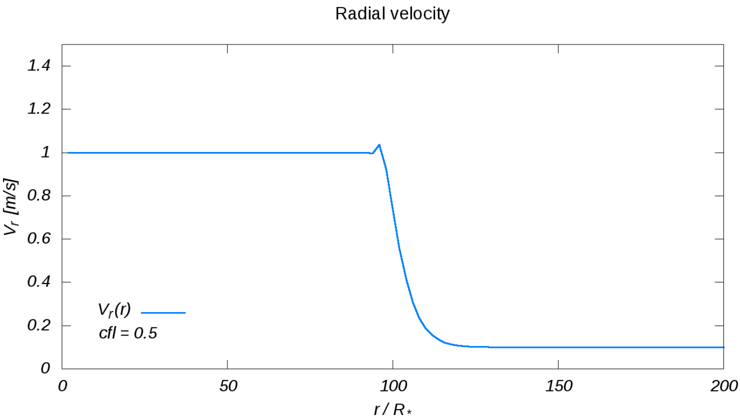
$$\xi = 1 - 2\alpha \sin\frac{1}{2}k\Delta x(\alpha \sin\frac{1}{2}k\Delta x + i\cos\frac{1}{2}k\Delta x),$$

$$|\xi|^2 = 1 - 4\alpha^2 \sin^2\frac{1}{2}k\Delta x(1 - \alpha^2\sin^2\frac{1}{2}k\Delta x - \cos^2\frac{1}{2}k\Delta x).$$

- Z požadavku $|\xi|^2 < 1$ opět vyplývá $\alpha < 1$.

Lax-Wendroffova metoda

- Stejná rovnice, modelovaná Lax-Wendroffovou metodou:



Implicitní schema

- Hodnoty veličiny f na pravé straně rovnice jsou počítány v čase t^{n+1}:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1})$$

Implicitní schema

- Hodnoty veličiny f na pravé straně rovnice jsou počítány v čase t^{n+1}:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1})$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl=α):

$$\xi = \frac{1}{1 + i\alpha \sin k\Delta x} = \frac{1 - i\alpha \sin k\Delta x}{1 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x},$$

$$|\xi|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x}.$$

Implicitní schema

- Hodnoty veličiny f na pravé straně rovnice jsou počítány v čase t^{n+1}:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1})$$

- von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl=α):

$$\xi = \frac{1}{1 + i\alpha \sin k\Delta x} = \frac{1 - i\alpha \sin k\Delta x}{1 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x},$$

$$|\xi|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x}.$$

- Je zřejmé, že implicitní schema vždy splňuje: $|\xi| \leq 1$,
- Je tedy vždy numericky stabilní.

Implicitní schema

- Ovšem - značnou nevýhodou komplikovanost výpočtu f_j^{n+1}.
- V každém časovém kroku nutnost řešení tridiagonální matice

$$\frac{\alpha}{2} f_{j-1}^{n+1} - f_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2} f_{j+1}^{n+1} = -f_j^n.$$

numerickými metodami lineární algebry.

Implicitní schema

- Ovšem - značnou nevýhodou komplikovanost výpočtu f_j^{n+1}.
- V každém časovém kroku nutnost řešení tridiagonální matice

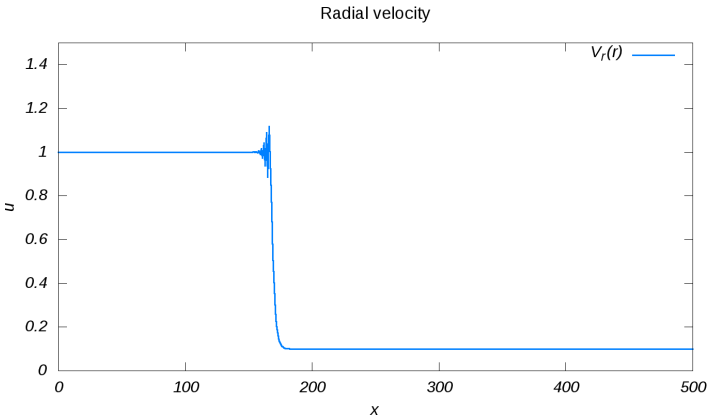
$$\frac{\alpha}{2} f_{j-1}^{n+1} - f_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2} f_{j+1}^{n+1} = -f_j^n.$$

numerickými metodami lineární algebry.

- V případě složitých problémů může být neschůdné.

Implicitní schema

- Stejná rovnice, modelovaná implicitní metodou:



Komplexnější schemata

- Vytvořena celá řada modernějších a přesnějších metod:

Komplexnější schemata

- Vytvořena celá řada modernějších a přesnějších metod:
- Použití tzv. prostřídané sítě (staggered mesh), umožňující oddělení toků veličin (flux splitting).

Komplexnější schemata

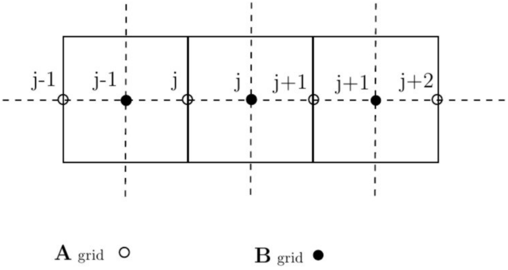
- Vytvořena celá řada modernějších a přesnějších metod:
- Použití tzv. prostřídané sítě (staggered mesh), umožňující oddělení toků veličin (flux splitting).
- Postupné přidávání jednotlivých členů pravé strany hd rovnic (operator splitting):

$$
\begin{aligned}
f^{n+1/m} &= U_1(f^n, \Delta t/m) \\
f^{n+2/m} &= U_2(f^{n+1/m}, \Delta t/m) \\
&\ldots \\
f^{n+1} &= U_m(f^{n+(m-1)/m}, \Delta t/m),
\end{aligned}
$$

kde m značí počet členů na pravé straně příslušné hd rovnice.

Komplexnější schemata

- Princip prostřídané sítě (staggered mesh):



- A-síť - vektorové veličiny
- B-síť - skalární veličiny

Komplexnější schemata

- Příklad současně používaného schematu - dvoukroková metoda s oddělenými toky, van Leerova derivace:

$$\Delta_- = \frac{\rho_{i-1} - \rho_{i-2}}{r_{b(i-1)} - r_{b(i-2)}}$$

$$\Delta_+ = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{r_{b(i)} - r_{b(i-1)}}$$

van Leerova derivace:

$$dvl = \begin{cases} \frac{2\Delta_-\Delta_+}{\Delta_- + \Delta_+} & \Delta_-\Delta_+ > 0 \\ 0 & \Delta_-\Delta_+ < 0 \end{cases}$$

interr = interpolant hydrodynamické veličiny na opačném rozhraní:

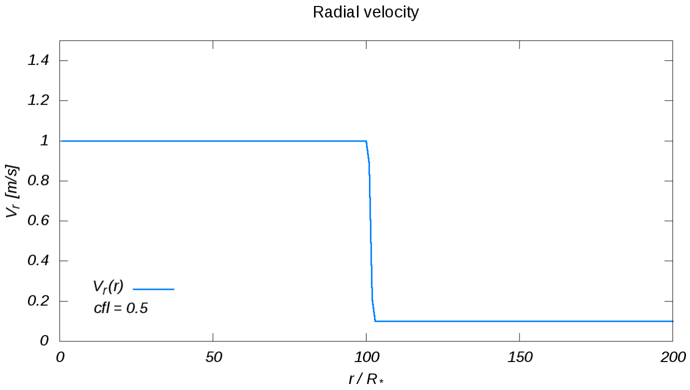
$$interr_i = \rho_{i-1} + dvl(r_{a(i)} - r_{b(i-1)} - u_{a(i)}\, dt/2)$$

advekční schema:

$$\rho_i = \rho_i - \frac{dt}{\Delta V_{b(i)}}(interr_{i+1} u_{a(i+1)} \Sigma_{a(i+1)} - interr_i u_{a(i)} \Sigma_{a(i)})$$

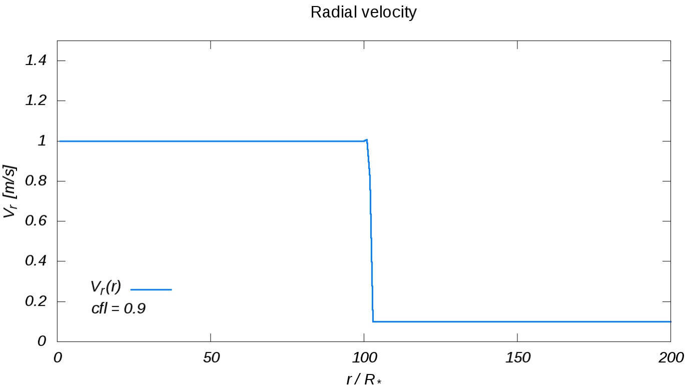
Komplexnější schemata

- Opět stejná advekční rovnice, modelovaná výše uvedenou metodou, *cfl* $= 0.5$:



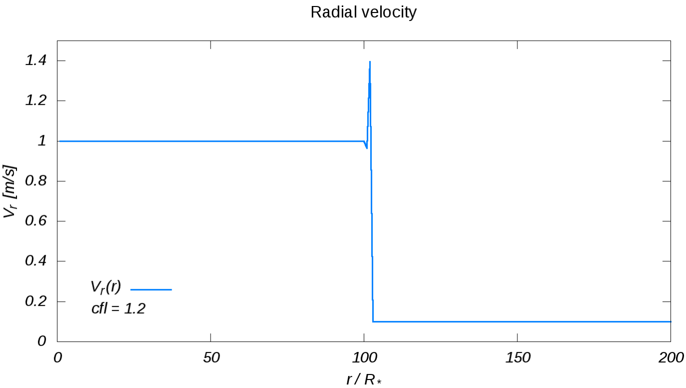
Komplexnější schemata

- Opět stejná advekční rovnice, modelovaná výše uvedenou metodou, $cfl = 0.9$:



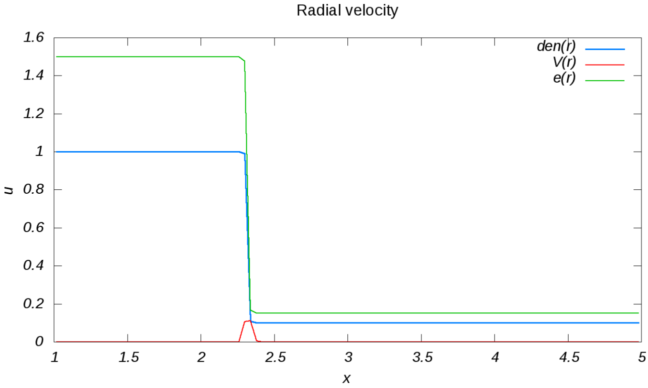
Komplexnější schemata

- Opět stejná advekční rovnice, modelovaná výše uvedenou metodou, $cfl = 1.2$:



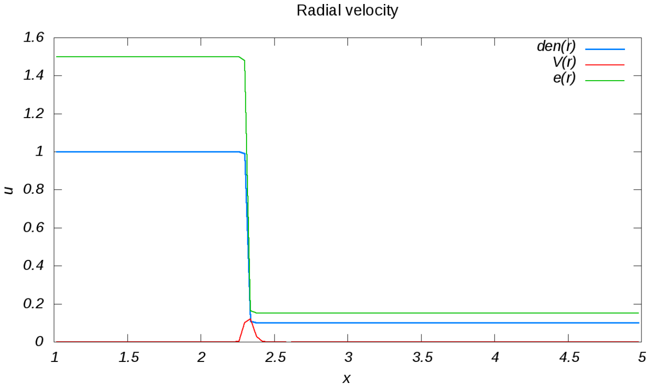
Modelování fyzikálních procesů

- Riemannova rázová trubice (neviskózní případ):



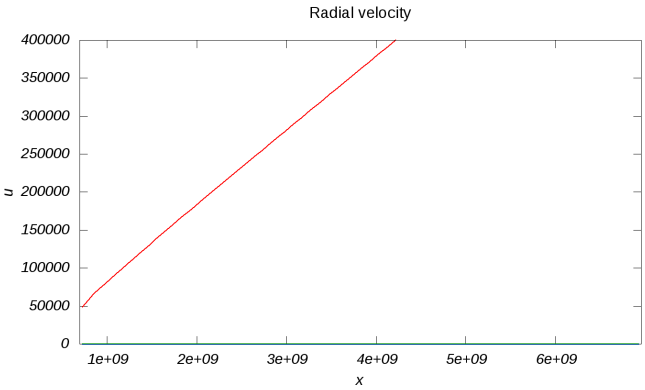
Modelování fyzikálních procesů

- Riemannova rázová trubice (viskózní případ):



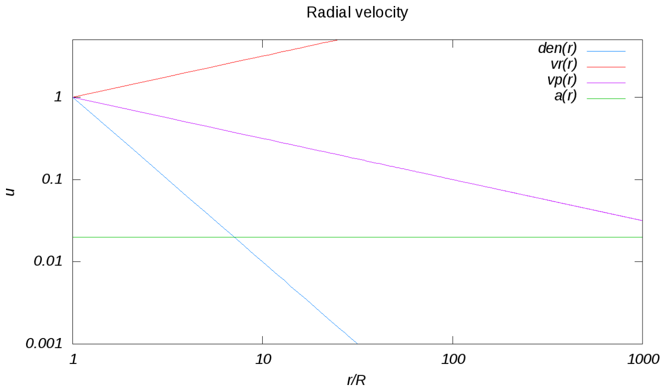
Modelování fyzikálních procesů

- Sluneční koronální vítr (Parkerova rovnice):



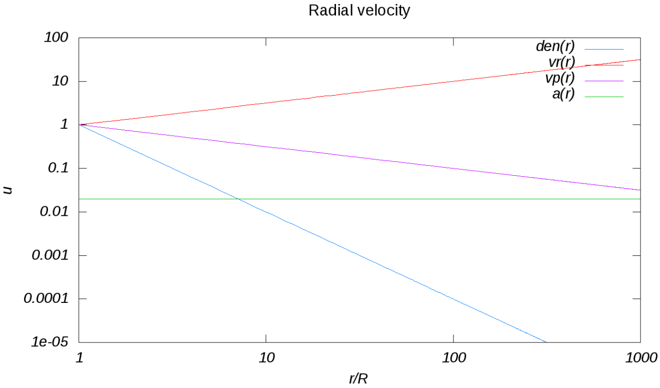
Modelování fyzikálních procesů

- Další možná úskalí - příklad hvězdného disku
- nesprávně nastavené Courantovo číslo:



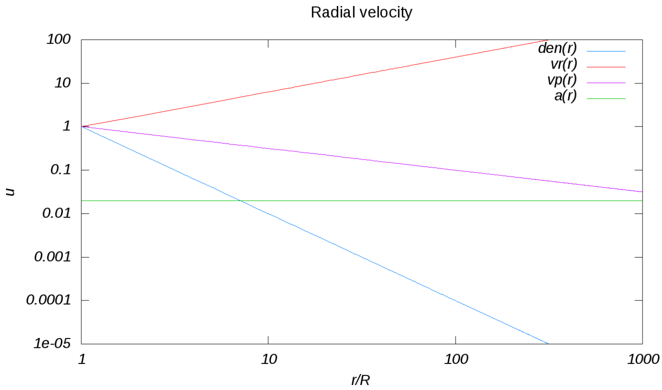
Modelování fyzikálních procesů

- Další možná úskalí - příklad hvězdného disku
- špatně zadaná okrajová podmínka pro v_ϕ:



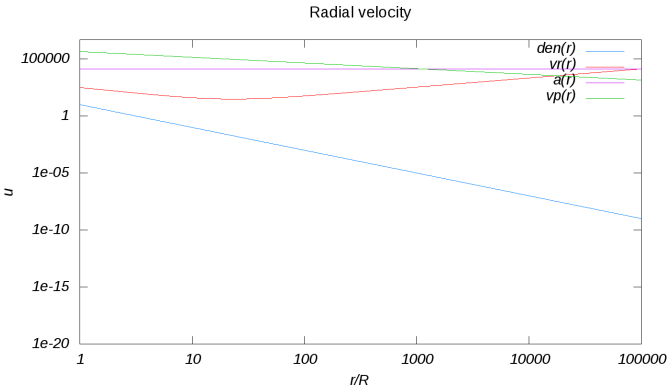
Modelování fyzikálních procesů

- Další možná úskalí - příklad hvězdného disku
- špatně zadaná okrajová podmínka pro v_r:



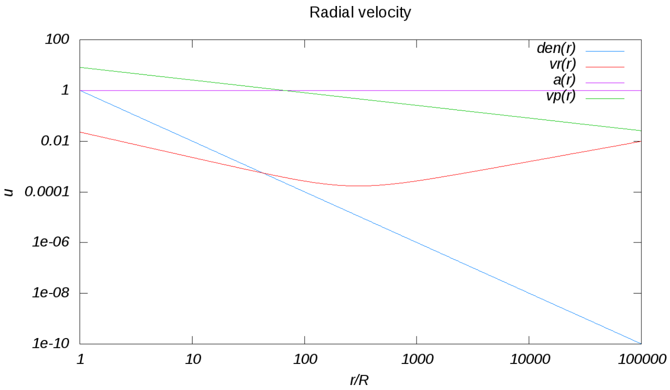
Modelování fyzikálních procesů

- Další možná úskalí - příklad hvězdného disku
- reálné parametry - příliš velké (cca 16 řádů) rozdíly v hodnotách:



Modelování fyzikálních procesů

- Další možná úskalí - příklad hvězdného disku
- vhodně provedené normování veličin:



Závěr

- Numerické výpočty metodami konečných diferencí - vhodné pro deterministické procesy
- Celá řada dalších metod a schemat
- Modelování principiálně náhodných jevů (záření) na zcela jiném principu (např. *Monte Carlo*)
- Dostupné hotové programy (kódy) (např. *ZEUS, Pencil* pro hd, *TLUSTY, CMFGEN* pro modelování hvězdných atmosfér, atd.)
- Uspokojivý výsledek pouze při splnění mnoha podmínek

Závěr

Literatura:

- Michael J. Thompson, *An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics*
- Michael I. Norman Karl-Heinz A. Winkler, *2-D Eulerian Hydrodynamics with Fluid Interfaces, Self-Gravity and Rotation*
- Randall J. Leveque, *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*

Závěr

Děkuji za pozornost