Kapitola 7

Nekonečné řady

7.1 Posloupnosti

Definice 7.1. *Posloupnost* je funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$, tj. zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Posloupnost označujeme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, n-tý prvek označujeme $f(n)$, f_n a nejčastěji a_n.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má *limitu* L, jestliže existuje číslo, ke kterému se prvky posloupnosti blíží. Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Například pro geometrickou posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} = \{q, q^2, q^3, \dots\}$, kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient, platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |q| < 1, \\ \infty & \text{je-li } q > 1. \end{cases}$$

Některé další příklady posloupností a jejich limit:

$$\begin{array}{ll} \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, \dots\} & \lim\limits_{n\to\infty} \quad \text{neexistuje} \end{array}$$

7.2 Číselné řady

Definice 7.2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou.* Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ dots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s.
Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad 7.3. Určete součet geometrické řady

$$a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad \text{kde} a \neq 0, q \neq 0.$$

Řešení. Nechť $|q| \neq 1$. Pak

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1},$$
$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme

$$(1-q)s_n = a - aq^n.$$

Odtud n-tý částečný součet je

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Je-li $|q| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ a součet

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Pro $q \geq 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ a řada diverguje, pro $q \leq -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.
Geometrická řada je konvergentní pro $|q| < 1$ a má součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$

▲

Přímo podle definice můžeme sečíst i jinou než jen geometrickou řadu.

Příklad 7.4. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Určíme n-tý částečný součet řady

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Na základě rozkladu výrazu pro člen a_n na parciální zlomky

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

můžeme předchozí částečný součet s_n přepsat ve tvaru

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Jelikož pro součet s řady platí

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

▲

Obecně je obtížné určit součet nekonečné řady a proto se často orientujeme na to, zda řada konverguje či diverguje, aniž bychom určovali její součet. K tomu slouží *kritéria konvergence*. Ukažme si alespoň dvě z nich.

Věta 7.5 (Podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$*, pak* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$*, pak řada* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *diverguje.*

Případ $q = 1$ nelze tímto kritériem rozhodnout a je třeba použít jiné kritérium.

Příklad 7.6. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Řešení. a) Podle limitního podílového kritéria dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 < 1$$

a daná řada konverguje.
b) Opět užitím limitního podílového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{(n+1)n^n n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = e > 1,$$

a proto daná řada diverguje.

▲

Věta 7.7 (Integrální kritérium)**.** *Nechť funkce f je kladná a klesající na intervalu $[1,\infty)$. Nechť $a_n = f(n)$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Příklad 7.8. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}.$$

Řešení. a) Užijeme integrálního kritéria. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je na intervalu $[1,\infty)$ nezáporná. První derivace $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \le 0$ pro každé $x \in [1,\infty)$ a proto je daná funkce nerostoucí na tomto intervalu. Zbývá tedy vyšetřit integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t - \ln 1 = \infty.$$

Jelikož integrál diverguje, diverguje i daná řada.
b) Funkce $f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln x}$ je pro všechna $x \in [2,\infty)$ nezáporná. Platí $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x\cdot \ln x)^2} \le 0$ pro všechna $x \in [2,\infty)$ a proto je daná funkce nerostoucí. Můžeme tedy užít integrálního kritéria a vyšetřit integrál $\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x$. Platí

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty} [\ln s]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \ln\ln t - \ln\ln 2 = \infty,$$

proto daná řada diverguje. Při výpočtu jsme užili substituce $s = \ln x$.

▲

7.3 Mocninné řady

Mocninná řada je řada funkcí tvaru

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{kde} \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Podobně jako u číselných řad je důležitá otázka pro která x tato řada konverguje. To určuje tzv. *poloměr konvergence* r, který můžeme určit podle vzorce

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Je-li $0 < r < \infty$, pak řada konverguje pro $x \in (-r, r)$ a diverguje pro $|x| > r$. Je-li $r = \infty$, pak řada konverguje pro všechna x.

Například pro řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

je poloměr konvergence

$$r = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

tj. řada konverguje pro $|x| < 1$. Součet této řady určíme jako součet geometrické řady, kde $a = 1$ a $q = -x$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

Odtud také plyne, že řada konverguje pro $|x| < 1$.

Pro která x můžeme mocninou řadu derivovat a integrovat člen po členu? Pro všechna $x \in (-r, r)$ platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \mathrm{d}x = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) \, \mathrm{d}t = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots.$$

Přitom výrazy na pravé straně mají stejný poloměr konvergence. Integrace a derivace řady využíváme při rozvoji funkcí do řad a při hledání součtu řady.

Příklad 7.9. Vyjádřete funkci $\ln(1 + x)$ mocninou řadou.

Řešení. Podle předchozího pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

dále platí

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1 + x),$$

dohromady dostáváme, že pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) \, \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots) \, \mathrm{d}t = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 7.10. Určete interval konvergence a součet mocninných řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 \cdots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1} = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^{3n-1} = x^2 - 2x^5 + 3x^8 - 4x^{11} + \cdots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

Řešení. a) Jedná se vlastně o geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = -x^3$. Jelikož geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$, proto $|-x^3| < 1$ a daná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$. Pro součet geometrické řady platí

$$s(x) = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+x^3}.$$

Proto platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1).$$

b) Pro interval konvergence platí

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

a tedy řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$. V tomto intervalu tedy existuje součet řady a řadu lze člen po členu derivovat

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Po derivaci dostáváme geometrickou řadu s kvocientem $q = -x$, jejíž součet je roven $\frac{1}{1+x}$. Proto pro součet $s(x)$ původní řady platí

$$s'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1).$$

Odtud integrováním dostáváme

$$s(x) = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+x) + c.$$

Konstantu c určíme dosazením konkrétního čísla z konvergenčního intervalu, např. $x = 0$

$$s(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{0^n}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \ln(1+0) + c \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Součet řady je roven

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1).$$

c) Využijme toho, že řada a řada z ní vzniklá derivováním, případně integrováním, mají stejný poloměr konvergence. Derivujme danou řadu člen po členu

$$s'(x) = \left(\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{2n} = 1 + (x-1)^2 + (x-1)^4 + \cdots$$

Po derivaci dostáváme geometrickou řadu s kvocientem $q = (x-1)^2$, jejíž součet je roven

$$\frac{1}{1-(x-1)^2} = \frac{1}{2x - x^2}.$$

Geometrická řada konverguje pro

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad |(x-1)^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (0, 2).$$

Pro součet původní řady platí

$$s'(x) = \frac{1}{2x - x^2}$$

a odtud integrováním

$$s(x) = \int \frac{1}{2x - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-2) + c = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 + c.$$

Konstantu c určíme dosazením čísla např. $x = 1 \in (0, 2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-1)^{2n+1}}{2n+1} = 0 \Rightarrow 0 = \ln\left(\frac{1}{1-2}\right)^2 + c \Rightarrow c = 0.$$

Součet řady je roven

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1} = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 \quad \text{pro} \quad x \in (0, 2).$$

d) Určeme poloměr konvergence

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Proto pro $x \in (-1,1)$ můžeme danou řadu integrovat člen po členu

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + c.$$

Dostáváme tak geometrickou řadu s kvocientem $q = x$ a součtem $\frac{x}{1-x}$. Proto platí

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1-x} + c$$

a odtud derivováním

$$s(x) = \left(\frac{x}{1-x} + c\right)' = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Dostáváme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{pro} \quad x \in (-1,1).$$

e) Pro poloměr konvergence platí

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+1}n|}{|(-1)^{n+2}(n+1)|} = 1.$$

Pro $x \in (-1,1)$ můžeme danou řadu integrovat člen po členu

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^{3n-1}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int n(-1)^{n-1}x^{3n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n}+c.$$

Dostáváme tak geometrickou řadu se součtem $\frac{x^3}{1+x^3}$. Platí

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{x^3}{1+x^3} + c$$

a odtud derivováním

$$s(x) = \left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{1+x^3} + c\right)' = \frac{x^2}{(1+x^3)^2}.$$

Proto pro součet řady platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^{3n-1} = \frac{x^2}{(1+x^3)^2} \quad \text{pro} \quad x \in (-1,1).$$

f) Obdobně jako v předchozích příkladech určíme interval konvergence $x \in (-1, 1)$. Upravme n-tý člen tak, abychom jej mohli vyjádřit pomocí derivace

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{pak} \quad nx^n = x \cdot (x^n)'.$$

Nyní dosaďme do řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} x \cdot (x^n)' = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'.$$

Přičemž $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ je geometrická řada se součtem $\frac{x}{1-x}$ a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(x-1)^2} \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1).$$

▲

Poznámka 7.11. Je-li dána funkce f, která má v bodě x_0 derivace všech řádů, pak řadu

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

nazýváme *Maclaurinovou řadou* funkce f. Například

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Pomocí předchozích vztahů můžeme dokázat tzv. *Eulerův vztah*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Platí

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \cdots = 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \mathrm{i} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \end{aligned}$$

7.4 Fourierovy řady

Fourierovy řady slouží k aproximaci periodických funkcí. Nechť je funkce definována na $[-\pi,\pi]$. Pak její Fourierova řada je

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

kde a_n a b_n jsou *Fourierovy koeficienty* funkce f, pro něž platí

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Je-li f sudá funkce, má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad \text{kde}\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n\in\mathbb{N}\cup\{0\}).$$

Je-li f lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\quad \text{kde}\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n\in\mathbb{N}).$$

Otázkou je, kdy je součtem Fourierovy řady funkce f právě tato funkce. Nechť f je po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi,\pi]$. Pak

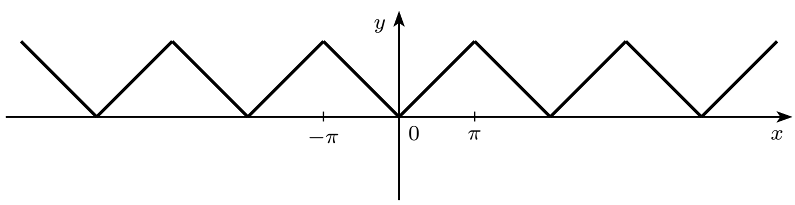
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ve všech bodech $x\in(-\pi,\pi)$, kde je spojitá.

V bodech nespojitosti je součtem Fourierovy řady aritmetický podíl limity zleva a limity zprava v tomto bodě.

Součtem řady pro všechna $x\in\mathbb{R}$ je tzv. *periodické rozšíření* funkce f.

Příklad 7.12. Funkci $f(x)=x$ rozviňte na intervalu $[0,\pi]$ do kosinové řady.



Obrázek 7.1: Sudé periodické rozšíření funkce x, $x\in(0,\pi)$

Řešení. Sudé periodické rozšíření funkce je znázorněno na obrázku. Přitom platí

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}[x\sin nx]_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

Tedy pro $x \in [0,\pi]$ platí

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

▲

Poznámka 7.13. Ukažme, jak lze odvozených výsledků využít k nalezení Fourierových řad periodických funkcí s periodou $p \neq 2\pi$. Označme kvůli jednoduchosti $p = 2h$ a předpokládejme, že f je integrovatelná funkce na intervalu $[-h,h]$. Pak funkce

$$g(t) = f\left(\frac{h}{\pi}t\right)$$

je periodická s periodou 2π, je-li přitom f po částech spojitá a po částech monotonní na $[-h,h]$, zřejmě je také funkce g po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi,\pi]$. Proto lze funkci g rozvinout do Fourierovy řady na $[-\pi,\pi]$, odkud zpětnou transformací $t\frac{\pi}{h}x$ obdržíme Fourierovu řadu funkce f na $[-h,h]$ ve tvaru

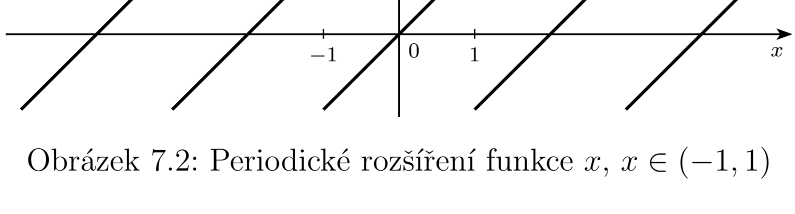
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{h}x + b_n\sin\frac{n\pi}{h}x\right),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou dány vzorci

$$a_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\cos\frac{n\pi}{h}x\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}\cup\{0\}),$$

$$b_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Příklad 7.14. Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ na intervalu $[-1,1]$.



Obrázek 7.2: Periodické rozšíření funkce x, $x \in (-1,1)$

Řešení. V tomto případě je $h = 1$, dále je f lichá, a proto $a_n = 0 pro n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 x \sin n\pi x \,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{n\pi}[x\cos n\pi x]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}[\sin n\pi x]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\pi x \qquad \text{pro} \quad x \in (-1,1).$$

▲

Poznámka 7.15. Animace zobrazující Fourierovy řady je možno nalézt na

`https://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/html/index.htm`.

Cvičení

1. Určete poloměr konvergence a součet mocninných řad:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$,

   c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

2. Rozviňte funkci do mocninné řady:

   a) $y = \operatorname{arctg} x$, b) $y = \ln(1-x)$.

3. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

4. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci $f(x) = |x|$ na intervalu $(-l, l)$.

Výsledky:

1. a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $|x|<1$, b) $\frac{2x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$,
   c) $\operatorname{arctg} x$, $|x|<1$, d) $(x+1)\ln(1+x)-x$, $|x|<1$.
2. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in(-1,1)$, b) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $x\in(-1,1)$.
3. $\operatorname{sgn}(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$,
4. $|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}$.