MATICE PŘECHODU ①

$\varphi : U \to V$ lineární $\quad \alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ báze U

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ báze V

Matice zobrazení $\qquad (\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta , (\varphi(u_2))_\beta , \dots , (\varphi(u_n))_\beta \right) \qquad$ (D)

je matice $k \times n$

$\forall u \in U: \qquad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha \qquad$ (ZR)

<u>Dále platí:</u> $\quad \varphi : U \to V, \; \psi : V \to Z, \quad \gamma$ je báze v Z

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$\varphi : U \to V$ lin. izomorf.

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

2

Matice přechodu je zvláštní případ matice zobrazení

$id : U \longrightarrow U$ je lin. zobrazení $id(u) = u$

$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ báze v U, $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jiná báze v U

MATICE PŘECHODU mezi α a β je

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta, (u_2)_\beta, \dots, (u_n)_\beta \right) \qquad (D)$$

1 sloupec jsou souřadnice vektoru u_1 v bázi β

Matici přechodu používáme k tomu, abychom spočítali souřadnice vektoru u v bázi β pomocí jeho souřadnic v bázi α

$$\boxed{(u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha} \qquad (ZR)$$

3

Pro matice přechodu platí analogické „vzorečky" jako pro matice zobrazení:

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E$$

$id \circ id = id$

$$(id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta} \cdot (id)_{\beta,\alpha}$$

id je lin. izomorfismus, proto

$(id)^{-1} = id$

$$\boxed{(id)_{\alpha,\beta} = \left((id)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}}$$

4

Příklad $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \varepsilon = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ $\quad \alpha = (u_1, u_2, u_3)$

$u_1 = (1,2,-1)$, $u_2 = (1,3,-3)$, $u_3 = (1,3,2)$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon \; (u_2)_\varepsilon \; (u_3)_\varepsilon \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((e_1)_\alpha \; (e_2)_\alpha \; (e_3)_\alpha \right)$$ Lepší je použít vztah

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((id)_{\varepsilon,\alpha} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5

Matice zobrazení v různých bázích

$\varphi: U \to V$ lineární $\qquad \alpha, \bar{\alpha}$ dvě báze v U

$\qquad \beta, \bar{\beta}$ dvě báze ve V

$$\varphi = id_V \circ \varphi \circ id_U$$

Aplikujeme „vzoreček" pro matici složeného zobrazení

$$(\varphi)_{\bar{\beta}, \bar{\alpha}} = (id_V)_{\bar{\beta}, \beta} \cdot (\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (id_U)_{\alpha, \bar{\alpha}}$$

Speciální případ $\qquad \varphi: U \longrightarrow U$, báze α a β v U

$$(\varphi)_{\beta, \beta} = (id)_{\beta, \alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha, \alpha} \cdot (id)_{\alpha, \beta}$$

(6)

Navíc, $(id)_{\beta,\alpha} = \left((id)_{\alpha,\beta}\right)^{-1}$. Takže předchozí vztah má tvar

$$B = P^{-1} A P$$

<u>Definice</u> Řekneme, že dvě matice A, B tvaru $n \times n$ jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice P tak, že

$$B = P^{-1} A P$$

Podobnost matic je relace ekvivalence

B ~~je~~ podobná A $\qquad B \approx A \qquad B = P^{-1} A P$

7

Ekvivalence je relace $\approx$, která má následující vlastnosti

(1) $A \approx A$ pro všechny matice $n \times n$ (reflexivita)

(2) $B \approx A \Rightarrow A \approx B$ (symetrie)

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow P \quad P^{-1} = A \Rightarrow A \approx B$$

(3) tranzitivita

$$A \approx B \text{ a } B \approx C \Rightarrow A \approx C$$

$$A = Q^{-1}BQ, \quad B = S^{-1}CS$$

$$A = Q^{-1}(S^{-1}CS)Q = Q^{-1}S^{-1}CSQ = (SQ)^{-1}C(SQ)$$

$$A \approx C$$

8

GRUPY A PERMUTACE

<u>Definice grupy</u>. Nechť G je neprázdná množina s jednou operací $\circ : G \times G \longrightarrow G$. Tato struktura se nazývá <u>grupou</u>, jestliže má operace $\circ$ tyto vlastnosti:

(1) je asociativní: $\forall a, b, c \in G \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(2) má neutrální prvek $e \in G$. $\forall a \in G \quad a \circ e = e \circ a = a$

(3) ke každému prvku existuje inverzní

$$\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G \qquad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

9

Příklady grup.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ neutrální prvek je 0
inverzní k n je $-n$

$(\mathbb{Q}, +)$
$(\mathbb{R}, +)$ všechno stejně
$(\mathbb{C}, +)$

Navíc
$a+b=b+a$
komutativní grupa
abelovská grupa

(2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ neutrální prvek je 1
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ inverzní prvek k r je r^{-1}
$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

abelovské grupy

10

(3) $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, operace násobení
je abelovská grupa s neutrálním prvkem 1

(4) Obecná lineární grupa (general linear)
$GL(n, \mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}$

je množina invertibilních matic $n \times n$
nad $\mathbb{R}$ s operací násobení matic
Neutrální prvek je E
Inverzní prvek k matici A je A^{-1}.
Pro $n \geq 2$ není $GL(n, \mathbb{R})$ komutativní

11

(4b) $GL(n, \mathbb{C})$ ... invertibilní matice $n \times n$ nad $\mathbb{C}$

(5) Permutace množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

Množina všech permutací S_n

Pro nás bude permutace bijektivní zobrazení

$\sigma : \{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots n\}$

σ:

1	2	3	...	$n-1$	n
$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	...	$\sigma(n-1)$	$\sigma(n)$

toto je bijektivní zobrazení. Zapomeneme-li na 1. řádek máme pořadí prvků $1, 2, \dots n$, tj. permutaci, jak ji známe z kombinatoriky.

12

Operace na S_n je skládání zobrazení.

$\sigma \in S_4, \quad \tau \in S_4, \quad \tau \circ \sigma \in S_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau \circ \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

neutrální prvek $id . \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Inverzní prvek je inverzní zobrazení.

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

13

Homomorfismus grup: Nechť G a H jsou dvě grupy s operacemi $\circ : G \times G \to G$, $\cdot : H \times H \to H$. Zobrazení $f : G \to H$ se nazývá grupový homorfismus, jestliže

$$\forall a, b \in G : \quad f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b)$$

Příklad: $\ln : \big((0, \infty)$ s operací násobení$\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R},$ sčítání$\big)$ je to homorfismus, neboť

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

Analogicky: $\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow ((0, \infty), \cdot) \qquad e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

14

Znaménko permutace: Každé permutaci z S_n přiřadíme číslo 1 nebo -1 (znaménko permutace) tímto předpisem

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{1, -1\}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{sign}\sigma = \frac{\boxed{1-4}}{2-1} \quad \frac{2-4}{3-1} \quad \frac{3-4}{\boxed{4-1}} \quad \frac{2-1}{3-2} \quad \frac{3-1}{4-2} \quad \frac{3}{4}$$

$$\frac{4-1}{1-2}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = \underline{\underline{-1}}$$

15

<u>Věta</u>. Pro znaménko permutace platí.

$$\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\sigma.$$

To lze vyjádřit slovy, že zobrazení $\operatorname{sign}: S_n \to \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ je homorfismus grup.

<u>Důkaz:</u>

$$\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{(\tau \circ \sigma)(i) - (\tau \circ \sigma)(j)}{i - j} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{i - j} \cdot \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\sigma(i) - \sigma(j)}$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\sigma$$

16

Výpočet znaménka permutace

$$\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Ve jmenovateli jsou všechny kladné. Výsledek 1 dostaneme, tj. když v čitateli sudý počet výrazů $\sigma(i) - \sigma(j)$ záporných a znaménko (-1), tj. když v čitateli těchto výrazů záporných lichý počet.

Taková dvojice (j, i), kde $j < i$ a $\sigma(j) > \sigma(i)$ se nazývá transverze. Proto

17

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{\text{počet transverzí}}$$

$$\sigma \quad \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}}$$

transverze z 2 řádku jsou

54 53 51 52
43 41 42
63 61 62
31 32

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{12} = \underline{1}$$

$$\sigma \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & & & 2 & 1 \end{matrix}$$

Počet transverzí je

$$\underbrace{n-1 + n-2 + \qquad + 1}= \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

18

Vlastnosti homorfismů grup

je-li $f: G \to H$ homorfismus, $e_G \in G$, $e_H \in H$ neutrální prvky, pak

(1) $f(e_G) = e_H$

(2) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

Důkaz: $a \in G$

(1) $f(a) \cdot e_H = f(a) = f(a \cdot e_G) = f(a) \cdot f(e_G)$ / vynásobíme $(f(a))^{-1}$ zleva

$f(a)^{-1} \cdot (f(a) \cdot e_H) = f(a)^{-1} (f(a) \cdot f(e_G))$

$(f(a)^{-1} \cdot f(a)) \cdot e_H = (f(a)^{-1} \cdot f(a)) \cdot f(e_G)$

19

$$e_H \cdot e_H = e_H \cdot f(e_G)$$

$$e_H = f(e_G)$$ a to jsme chtěli dokázat

(2) $\underline{f(a)\cdot(f(a))^{-1}} = e_H = f(e_G) = f(a\cdot a^{-1}) = \underline{f(a)\cdot f(a^{-1})}$ / Násobíme $(f(a))^{-1}$ zleva

$$(f(a))^{-1}\left[f(a)\cdot(f(a))^{-1}\right] = (f(a))^{-1}\left[f(a)\cdot f(a^{-1})\right]$$

$$\left[(f(a))^{-1}\cdot f(a)\right](f(a))^{-1} = \left[(f(a))^{-1}\cdot f(a)\right]\cdot f(a^{-1})$$

$$e_H \cdot (f(a))^{-1} = e_H \cdot f(a^{-1})$$

$$\underline{\underline{(f(a))^{-1} = f(a^{-1})}}$$

20

Determinant matice

Každé čtvercové matici A tvaru $n \times n$ přiřadíme číslo $\det A$, které bude mít následující vlastnost:

Soustava $$A x = b \qquad (a \cdot x = b)$$

je jednoznačně řešitelná pro každou pravou stranu právě když $$\det A \neq 0. \qquad (a \neq 0)$$

21

Definice determinantu (!!)

Nechť A je matice $n \times n$ s ~~...~~ prvky $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \, a_{2\sigma(2)} \, a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

σ

$\{\sigma(1)\, \sigma(2) \ldots \sigma(n)\}$
$= \{1, 2, \ldots n\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \; a_{1\sigma(1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; a_{2\sigma(2)} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \; a_{3\sigma(3)} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$