

$$= (\text{id}_V)_{\beta, \beta} \cdot (\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (\text{id}_U)_{\alpha, \alpha'}$$

Specialni případ ma $U = V$ $\varphi : U \rightarrow U$
 $\forall U$ máme báze γ, δ

$$(\varphi)_{\delta, \delta} = (\text{id})_{\delta, \gamma} (\varphi)_{\gamma, \gamma} (\text{id})_{\gamma, \delta} = (\text{id})_{\gamma, \delta}^{-1} (\varphi)_{\gamma, \gamma} (\text{id})_{\gamma, \delta}$$

$$D = P^{-1} C P$$

Definice: Řekneme, že reálnové matice C a D jsou $\text{POD}^{\text{O}}\text{BNE}$,
 pokud existuje invertibilní matice P taková, že platí

$$D = P^{-1} C P.$$

⊕ Transpozice dvojice (j, i) $j > i$ balenci, zé $\sigma^{(j)} < \sigma^{(i)}$

1 2 3 4 5 6
6 1 4 3 2 5

Pril. transpozici $3 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0 = 8$

3 1 $1 < 3$
4 6 $6 > 4$

sign $\sigma = (-1)^8 = 1$

čísloiství roli mají tzv. transpozice, to je permutace, která „přehazuje“

dvě čísla

$$(i j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i-1 & \dots & j & j-1 & \dots & n \\ 1 & 2 & & i-1 & \cdot & j & & i & i-1 & \dots & n \\ & & & & j & \underbrace{i+1 \dots i}_{j-i-1} & & i+1 & & & n \end{pmatrix}$$

⑥

Důkaz

$$\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \prod_{j>i} \frac{\pi \circ \sigma(j) - \pi \circ \sigma(i)}{j - i} = \prod \frac{\pi \circ \sigma(j) - \pi \circ \sigma(i)}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{j>i} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Přes
všechny
inverze
 $\{\sigma(j), \sigma(i)\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$$= \prod_{\substack{\{k, l\} \\ \subseteq \{1, 2, \dots, n\}}} \frac{\pi(k) - \pi(l)}{k - l} \operatorname{sign} \sigma = \prod_{k>l} \frac{\pi(k) - \pi(l)}{k - l} \cdot \operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \sigma$$

$$A = (a_{11}) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \text{sign } \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

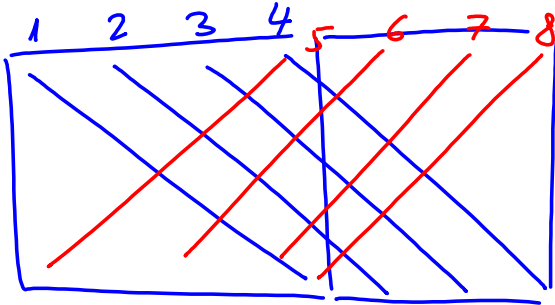
$$\det A = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot a_{11} a_{22} - \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12} a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

A matrice 4×4

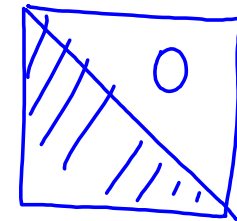
1) defini determinantul înainte ca să $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ saimii

Sau un saș paridlo da sa puse 8 saimii. Nelaș ym determinantul pital.



Vypicit determinantul dolni kaji helni keri matrice

To k matice $n \times n$ talera, se $a_{ij} = 0$ mo $i < j$.
Mad klami ullopericheu prau same naly



Príklad: Ak $\sigma(1) \neq 1$, pak $a_{1\sigma(1)} = 0$ a príslušný riadok v definícii del
 je takisto nulový. Nech teda $\sigma(1) = 1$. Príkladom permutácie, ak $\sigma(2) \neq 2$,
 pak $a_{2\sigma(2)} = 0$.

Príklad nemariánskej permutácie

$$\sigma(1) = 1 \text{ a } \sigma(2) \neq 2,$$

stati mariánskej permutácie

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2$$



Tiež ide o $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 3 \Rightarrow a_{3\sigma(3)} = 0$

Stati mariánskej permutácie

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 3, \text{ atď.}$$

Dojdem k tomu, že stati mariánskej permutácie $\sigma = \text{id} \Rightarrow$ veta

Základní matematické děkujeme

(1) Necht A je matice $n \times n$ a necht \exists matice B symetrická a A symetrická
 jsou iidku. Pak

$$\det B = -\det A$$

Pr: $B = (b_{ij})$ $A = (a_{ij})$ B symetrická a A symetrická 1 a 2 iidku

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot a_{2\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \text{sign } \sigma \cdot a_{1\sigma(2)} a_{2\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\begin{matrix} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ \sigma(2) \end{matrix}$

- ③ Matice B vznikne z matice A tak, že i -ty řádek vynásobíme číslem c . Pak $\det B = c \det A$.

$$\underline{\text{Dk.}} \quad \det B = \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot c a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= c \left(\sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \right) = c \det A$$

- ④ Necht A, B, C jsou tři matice $n \times n$ řádkové, se stejnými řádkovými prvky $r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$ a pro všechny sloupce $r_j(A) = r_j(B) = r_j(C)$.
Potom $\det(C) = \det A + \det B$

Vynásobíme
řádky

⑤ Matriisi C saadaan A lisäämällä c kertaa i .-riviä j .-riviin ($j \neq i$). Pää

$$\det C = \det A$$

Dk: Paraisimme matriisin A , jolloin matriisi B saadaan kullo

$$r_i(B) = c r_j(A) \quad r_k(B) = r_k(A) \quad k \neq i$$

$$r_i(C) = r_i(A) + c r_j(A) = r_i(A) + r_i(B)$$

$$\text{Kun } k \neq i \quad r_k(C) = r_k(A) = r_k(B)$$

Pääte ④

$$\det C = \det A + \det B = \det A + c \det \begin{pmatrix} \dots \\ r_j(A) \\ \dots \\ r_j(A) \\ \dots \end{pmatrix} = \det A + 0 \quad \text{pääte ②}$$

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \text{sgn } \sigma^{-1} a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\tau} \text{sgn } \tau a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det A$$

⑦ Tre, ce platiha pa iadlone' u' pany plati' pa dleupone'

D₂. Plaupone' u' pany na A odpen.daji' iadlone' u' pany na A^T a del A = del A^T paraim

$$A \xrightarrow{\text{ESO}} B \quad \det A = \det A^T = f(\det B^T) = f(\det B)$$

$$A^T \xrightarrow{\text{ERO}} B^T$$

