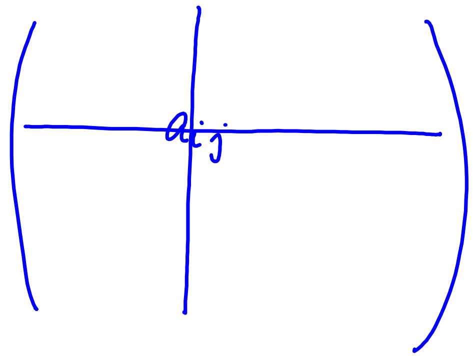
Laplaceův rozvoj determinantu

$A = (a_{ij}) \quad n \times n$



$a_{ij} \qquad A_{ij}$ matice $(n-1)\times(n-1)$

$$|A_{ij}| = \det A_{ij}$$

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

alg. doplněk

i pevné

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = A$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 11 = 11$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 8 = -8$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot 11 - 8 \cdot 3 = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$-11 + 12 = 1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\det A}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,\tilde{a}_{jk}}_{\text{podle L. rozvoje } = \det A}\Big) = 1 \quad \text{pro } i=j$$

$$\frac{1}{\det A}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\tilde{a}_{jk}}_{\text{To je Lapl. rozvoj matice } C \text{ podle } j\text{-tého řádku}}\Big) = \frac{\det C}{\det A} = \frac{0}{\det A} = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

$$C = \begin{pmatrix} r_i(A) \\ r_i(A) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-tý} \\ \leftarrow j\text{-tý} \end{array}$$

$$\sum c_{jk}\,\tilde{c}_{jk} = \det C$$

$$\sum a_{ik}\,\tilde{a}_{jk}$$

C je stejná jako matice A jenom místo j. řádku má i. tý řádek matice A, má to dva řádky stejné, tudíž det C = 0.

Důkaz.

$$Ax = b \quad / \; A^{-1}\cdot \qquad \det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ existuje}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Tedy je Laplaceův rozvoj matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ & b_2 & \\ & \vdots & \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{pmatrix}$$

podle j. tého sloupce

Známe $A^{-1} = \left(\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\det A}\right)^T$

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{jk}\, b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{kj}}{\det A}\cdot b_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k \tilde{a}_{kj}}{\det A} = \frac{\det(\quad)}{\det A}$$

Cramerovo pravidlo pro $n=1$ $\quad a \cdot x = b \quad a \neq 0 \quad x = \frac{b}{a}$ — To jsou ty dva determinanty z Cram. pravidla

* Laplaceův rozvoj determinantu podle více řádků (sloupců)

$$
\begin{array}{c|c}
 & \quad\downarrow j_1 \qquad\qquad \downarrow j_2 \\
A \quad \begin{array}{c} i_1 \rightarrow \\ \\ i_2 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \bullet & & \bullet \\ & & \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$A(i_1,i_2,j_1,j_2) = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}(i_1,i_2,j_1,j_2)$ = det matice $(n-2)\times(n-2)$ která vznikne z A tak, že vypustíme řádky i_1, i_2 a sloupce j_1, j_2

Lapl. rozvoj

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} A(i_1,i_2,j_1,j_2) \cdot \tilde{A}(i_1,i_2,j_1,j_2)$$

$$= \cdot (-1)^{\overbrace{n+(n-1)}^{\text{řádky}} + \overbrace{n+(n-1)}^{\text{sloupce}}} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \Big(A_{n-1} \Big)$$

$$\det A_n = (ad - bc) \cdot \det A_{n-1} = \dots = (ad-bc)^n$$

VÝZNAM DETERMINANTU

(1) Výpočet vlastních čísel (v 2. semestru)

(2) Determinant je orientovaný objem

Orientovaný obsah má následující vlastnosti.

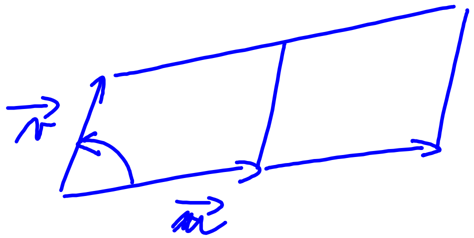
(1) $V(c\vec{u}, \vec{v}) = c\,V(\vec{u}, \vec{v})$

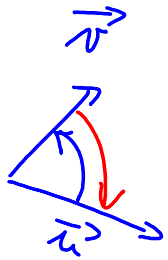
$V(\vec{u}, c\vec{v}) = c\,V(\vec{u}, \vec{v})$

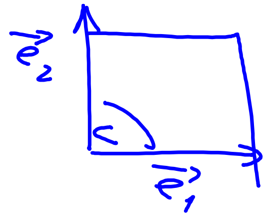
(2) $V(\vec{v}, \vec{u}) = -V(\vec{u}, \vec{v})$

(3) $V(\vec{x} + \vec{y}, \vec{v}) = V(\vec{x}, \vec{v}) + V(\vec{y}, \vec{v})$

(4) $V(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$





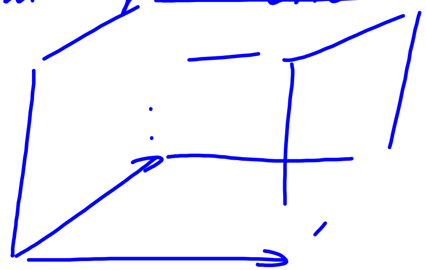


$V(\vec{v}, \vec{v}) = -V(\vec{v}, \vec{v})$

$2V(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow V(\vec{v}, \vec{v}) = 0$

Orientovaný objem v $\mathbb{R}^3$

$V(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ je orient. objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$



Znaménko určím přibližně podle pravidla pravé ruky

Opět platí pravidla ①, ②, ③ a $V(e_1,e_2,e_3) = 1$

Z toho lze odvodit, že pro $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

platí $V(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$