Rozvoj mohu dělat také podle sloupců

Rozvoj podle j-tého sloupce je

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

VÝPOČET INVERZNÍ MATICE pomocí alg. doplňků

<u>Věta</u>: Čtvercová matice A má inverzní matici právě tehdy když $\det A \neq 0$. V tomto případě je

$$A^{-1} = \frac{(\tilde{a}_{ij})^{T}}{\det A}$$

matici alg. doplňků transponujeme

Důkaz věty.

Nechť A^{-1} existuje. Potom

$$\begin{aligned} \det A\cdot A^{-1} &= \det A\cdot\det A^{-1} \\ \det E &= \det A\cdot\det A^{-1} \\ 1 &= \det A\cdot\det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0. \end{aligned}$$

(Dále z toho plyne $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.)

Obrácení. Nechť $\det A \neq 0$. Vezmeme matici $B = \left(\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\det A}\right)^T$

a spočítejme součin $A\cdot B$

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\tilde{a}_{jk}\right)\frac{1}{\det A} \qquad b_{kj} = \frac{\tilde{a}_{jk}}{\det A}$$

Cramerovo pravidlo

Mějme matici A typu $n \times n$ a uvažujme rovnici v $\mathbb{K}^n$

$$A x = b$$

jestliže $\det A \neq 0$, pak je soustava jednoznačně řešitelná a

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & & b_2 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & & & b_n & & & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

j-tý sloupec

[illegible]

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= b_1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= b_2 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \alpha + \alpha + \alpha - \alpha^3 - 2 = -\alpha^3 + 3\alpha - 2 = -(\alpha-1)^2(\alpha+2)$$

[illegible] $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -2$, [illegible]

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & 1 & \alpha \\ b_2 & \alpha & 1 \\ b_3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-(\alpha-1)^2(\alpha+2)}$$

A_n je matice $2n \times 2n$

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & & & 0 & & & b \\ & \ddots & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & & & b & & \\ 0 & & & a & b & & & 0 \\ & & & c & d & & & \\ & & c & & & d & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & 0 & & \ddots & \\ c & & & & & & & d \end{pmatrix}$$

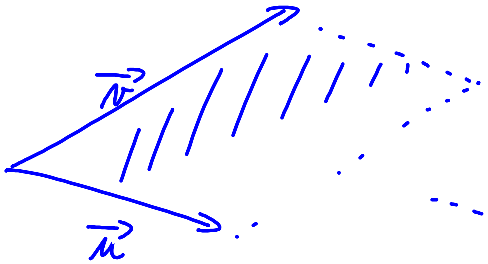
Udělejme rozvoj matice A_n podle n. řádku a $(n+1)$-ního řádku

$$= \dots + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} \cdot \det (-1)^{?} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{=0} \cdot \det (-1)^2 + \underbrace{\det\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}}_{=0} \det (-1)^2$$

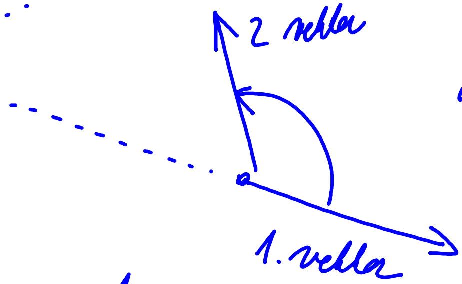
Co je orientovaný obsah v $\mathbb{R}^2$

Dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ v $\mathbb{R}^2$

$$V(\vec{u},\vec{v}) = \pm \text{ obsah } \cancel{\text{rovnoběžnostěnu}} \text{ rovnoběžníku}$$

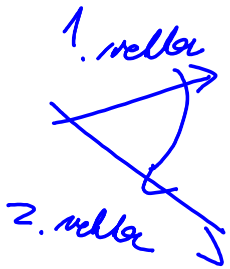


znaménko podle pořadí vektorů



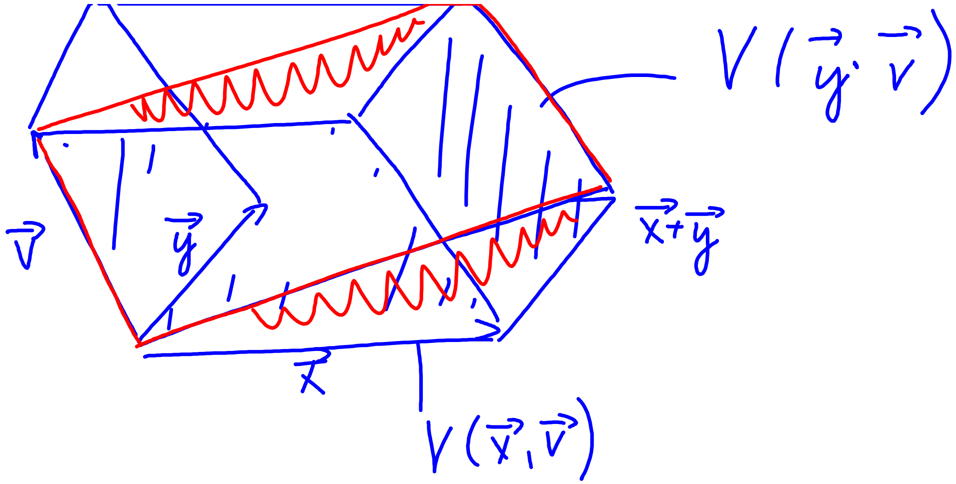
otočení proti směru hod. ručiček

znaménko je $+$



otočení ve směru hod. ručiček

znam. „ “ $-$



$$V(\vec{x}+\vec{y}, \vec{v}) = V(\vec{x}, \vec{v}) + V(\vec{y}, \vec{v})$$

Ult. iome. ie pe $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ plan

$$V(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad \vec{v} = y_1 e_1 + y_2 e_2$$

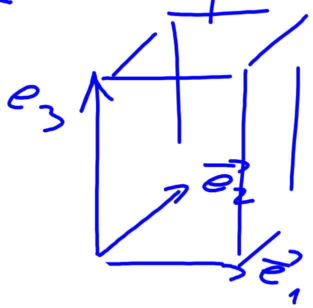
$$V(\vec{u}, \vec{v}) = V(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \underset{3}{=} V(x_1 e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2) + V(x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

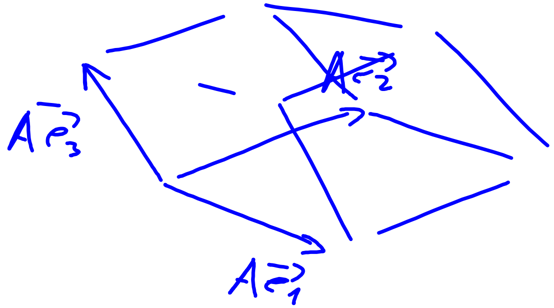
$$\underset{2 \times 3}{=} V(x_1 e_1, y_1 e_1) + V(x_1 e_1, y_2 e_2) + V(x_2 e_2, y_1 e_1) + V(x_2 e_2, y_2 e_2)$$

$$\underset{\text{moduli } 1}{=} x_1 y_1 \underbrace{V(e_1, e_1)}_{0} + x_1 y_2 \underbrace{V(e_1, e_2)}_{1} + x_2 y_1 \underbrace{V(e_2, e_1)}_{-V(e_1, e_2) = -1} + x_2 y_2 \underbrace{V(e_2, e_2)}_{0}$$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^3$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x) = Ax$





krychle objemu 1 se zobrazí na rovnoběžnostěn objemu

$$V(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = \det\left(Ae_1, Ae_2, Ae_3\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$