HODNOST MATICE

Při

A matice typu $k \times n$ (k řádků, n sloupců) s prvky v $\mathbb{K}$

$r_i(A)$ ... i-tý řádek

$s_j(A)$ .... j-tý sloupec

Řádková hodnost matice A je číslo

$$h_r(A) = \dim [r_1(A), r_2(A), \ldots, r_k(A)]$$

kde $[r_1(A), \ldots, r_k(A)] \subseteq \mathbb{R}^n$

Jinak ... maximální počet lin. nezávislých řádků

<u>Příklad</u>. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix} \sim \ldots\ldots \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$h_r(A) = \dim\left[(1,2,3,4,5),\ (6,7,8,9,10),\ (7,9,11,13,15)\right]$$

$$= \dim\left[(1,2,3,4,5),\ (6,7,8,9,10)\right] = 2$$

$$h_s(A) = \dim\left[\begin{pmatrix}1\\6\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\9\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}\right] = \dim\left[\begin{pmatrix}1\\6\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}\right] = 2$$

Matici A upravíme řádkovými úpravami na matici B

Podle předchozího

$$[s_1(A), \dots s_n(A)] \underset{1.\,úprava}{=} \underset{2.\,úprava}{=} \qquad = [s_1(B), s_2(B), \,.\, s_n(B)]$$

$$\dim[s_1(A), \dots] = \dim[s_1(B), \dots]$$

$$h_r(A) = h_r(B)$$

<u>Důkaz věty $h_s(A) = h_r(A)$</u>

Vzpomeneme si na algoritmus, který ze seznamu sloupců vybírá lin nezávislé se stejným lin obalem. V tomto algoritmu upravujeme matici A řádkovými úpravami na matici B ve schod tvaru.

$h_s(A) =$ max. počet lin. nez. sloupců $=$ počet vedoucích koeficientů matice B

$h(A) < n$ Pak při úpravě na schod. tvar B dostaneme nulový řádek

$\det B = 0 \Rightarrow \det A = 0.$

VĚTY O ŘEŠENÍ SOUSTAV LIN. ROVNIC

(1) Řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ pro neznámou $x \in \mathbb{K}^n$ je vektorový podprostor v $\mathbb{K}^n$ dimenze

$$n - h(A).$$

<u>Příklad</u>: Rovnice roviny v $\mathbb{R}^3$: procház. počátkem

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \quad h(A) = 1$$

Rovnice popisují rovinu $\mathbb{R}^3$ $\quad h(A) = 0$

<u>Důkaz</u> A matice $k \times n$

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax$$

$$\{x \in \mathbb{K}^n ,\ Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n ,\ \varphi(x) = 0\} = \ker \varphi$$

$$\dim \mathbb{K}^n = \dim \ker \varphi + \boxed{\dim \operatorname{im} \varphi} = h(A) \qquad Ae_1$$

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{K}^n - \dim \operatorname{im} \varphi = n - \dim[\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)]$$

$$= n - \dim[s_1(A), s_2(A), \dots] = n - h_s(A) = n - h(A)$$

$$b = x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + \dots + x_n s_n(A) = \begin{pmatrix} s_1(A) & \dots & s_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Soustava $Ax = b$ má řešení

Obráceně: nechť $x_1, \dots x_n$ je řešení soustavy.

$$b = Ax = \begin{pmatrix} s_1(A), & \dots & s_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 s_1(A) + \dots + x_n s_n(A)$$

b je lin. kombinací $s_1, s_2 \dots s_n$

Proto

$$\begin{aligned} [s_1(A), \dots s_n(A)] &= [s_1(A), \dots s_n(A), b] \\ \dim[\quad] &= \dim[\quad] \\ h(A) &= h(A|b) \end{aligned}$$

Tedy $y = y_0 + (y - y_0)$

$\searrow$ řešení $Ax = 0$.

① Lin. nezávislost a lin. obal

–

–

–

–

② . Lin. zobrazení

–

–

–

–

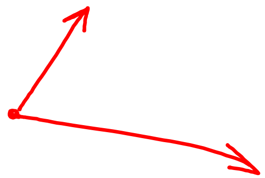
$v_1, \dots, v_k$ LN, $u_1, \dots, u_n$

$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}$ tak, že

1. $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_m}$ jsou LN

2. $[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_m}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots u_m]$

$$[u_1, \dots, u_n] = \{ a_1 u_1 + \dots + a_n u_n,\ a_i \in \mathbb{K} \}$$



$\ker \varphi = \{\vec{0}\} \iff \varphi$ je injektivna

$\ker \varphi \subseteq V$ vekt. podprostor

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ $\quad \underline{\varphi(x) = A\, x}$ $\quad A \ldots k \times n$

$\varphi : \cancel{[0,1] \to \mathbb{C}}$ $\quad \varphi(f, g) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad \varphi : \mathbb{C}^{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{C}$

je linearna

$f, g \in \underbrace{\mathbb{C}^{[0,1]}}$

množica
preslikav iz $[0,1]$ da $\mathbb{C}$

$$\varphi(f + g) = (f + g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\psi(f) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 3 f\left(\frac{3}{4}\right)$$