

## ① Operace na

vekt. prostoru  $V$  nad  $\mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$   
 neprázdná množina s operacemi

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

$$(a, \vec{u}) \mapsto a \vec{u}$$

kteří splní & vlastnosti.

Dávej příklady vekt. prostoru

$V = \mathbb{K}[x]$  polynomy s proměnnou  $x$  s koeficienty v  $\mathbb{K}$

$V = \mathbb{K}_n[x]$  polynomy stupně  $\leq n$   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\sim$  vekt. prostor nad  $\mathbb{K}$

$n \ n \ n$

$$\textcircled{5} \text{ Dom } f = \{ (i, j), i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n \}$$

$$f : M \rightarrow K \quad \left( \begin{array}{cccc} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & \dots & f(1,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(k,1) & f(k,2) & \dots & \dots & f(k,n) \end{array} \right)$$

$$\text{Map}(M, K) \cong \text{Mat}_{k \times n}(K)$$

↓  
↳ isomorfism

$$K^M$$

⑤ Další vlastnosti vektorového produktu, které lze odvodit z axiomů.

$$(a) \quad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$(b) \quad a \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

(c) Jestliže  $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$ , pak  $a = 0$  nebo  $\vec{v} = \vec{0}$ .

$$(d) \quad (-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$$

$$(e) \quad \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) \left( \sum_{j=1}^m \vec{v}_j \right) = \sum_{i=1, j=1}^{i=k, m} a_i \vec{v}_j$$

Důkaz (c) pomocí (a) a (b).

Nechť  $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$  a navíc  $a \neq 0$ .

$$a \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad \left| \frac{1}{a} \cdot \right.$$

Lineárni kombinace vektorů  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V$

je vektor  $a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k \in V$

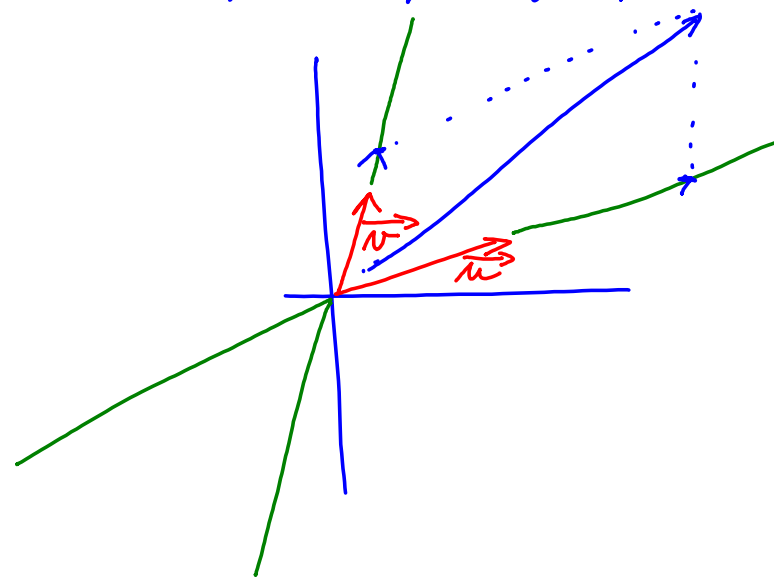
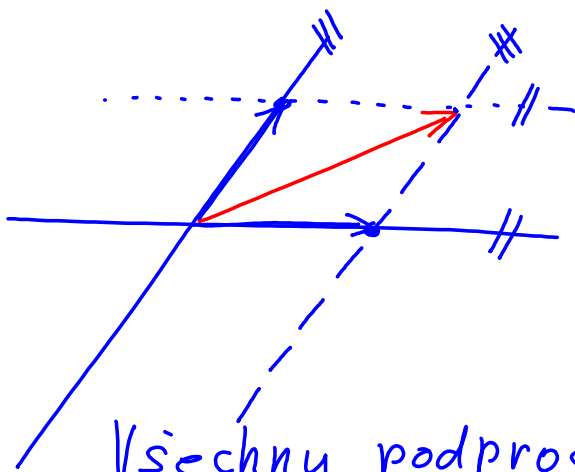
kde  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  ( $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ )

Definice: Necht  $U$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ . Největší podmnožina  $V \subseteq U$  je maximální vektorovým podprostorem prostoru  $U$ , jíž-liž platí

$$(1) \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} \in V \quad (\text{uzavřenost na sčítání})$$

$$(2) \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V \quad a \vec{v} \in V \quad (\text{uzavřenost na násobek})$$

⑨  $\vec{u}, \vec{v} \in U, \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \neq a\vec{v}$  (geomeludly: neloci  
na jedne přímce procházející počátkem)  
Za těchto podmínek, je  $U = \mathbb{R}^2$ .



Všechny podprostory  $\sim \mathbb{R}^2$  jsou  
 $\{\vec{0}\}$ , přímky procházející počátkem,  $\mathbb{R}^2$ .

10)

Lemma Nechť  $V \subseteq U$  je vektorový podprostor. Pak platí:

(a)  $\vec{0} \in V$

(b)  $\forall a, b \in K, \vec{u}, \vec{v} \in V \quad a\vec{u} + b\vec{v} \in V$

(c)  $\forall a_1, a_2, \dots, a_k \in K, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V \quad \sum_{i=1}^k a_i \vec{u}_i \in V$

Důkaz (a) Nechť  $\vec{v} \in V$ . Podle  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \in V$ .

(b)  $\vec{u}, \vec{v} \in V \quad a\vec{u}, b\vec{v} \in V$  podle (2) a  $a\vec{u} + b\vec{v} \in V$  podle (1)

(c) Indukcí

Poznámka: Vlastnosti (1) a (2) a definice jsou ekvivalentní s vlastností (b).

13) Lineární obal vektorů  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in U$

je množina

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k] = \left\{ a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k \in U, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K} \right\}$$

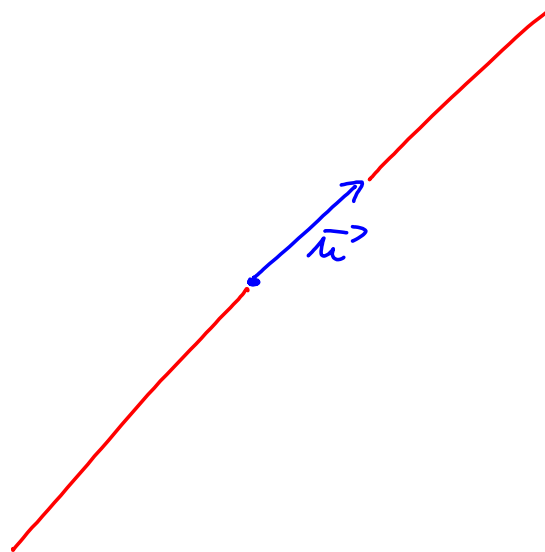
$$[\emptyset] = \{ \vec{0} \}$$

Příklady v  $\mathbb{R}^2$

$$[\vec{0}] = \{ a \vec{0} \} = \{ \vec{0} \}$$

$$\vec{u} \neq \vec{0}$$

$$[\vec{u}] = \{ a \vec{u}, a \in \mathbb{R} \}$$



⑮ Věta. Lineární skalární vektory  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in U$  je vekt. podprostor  
 $v U$

Důkaz. Chceme dok. že

$$u, v \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k], \text{ pak } \vec{u} + \vec{v} \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$$

$$\text{pak } a\vec{u} \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$$

Jedliže  $u, v \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k], \text{ pak}$

$$\vec{u} = a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k$$

$$\vec{v} = b_1 \vec{u}_1 + \dots + b_k \vec{u}_k$$

$$\vec{u} + \vec{v} = a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k + b_1 \vec{u}_1 + \dots + b_k \vec{u}_k =$$

$$= (a_1 + b_1) \vec{u}_1 + \dots + (a_k + b_k) \vec{u}_k \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$$



①7) Tato rovnice vede na rovnici

$$\left. \begin{array}{l} 1 = a_1 + 0 a_2 \\ 2 = 2a_1 + 2a_2 \\ 3 = 0 + a_2 \\ 4 = a_1 + a_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ 2 \neq 2 + 6 \\ a_2 = 3 \\ 4 = 1 + 3 \end{array}$$

Systém nemá řešení, daná matice nemá  $n$  daných řádků

Řekneme, že vektory  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in U$  jsou lineárně závislé, pokud existují  $k$ -tice  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k$  tak, že  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$  a zároveň  $a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k = \vec{0}$ .

$$\textcircled{19} \quad -\frac{a_1}{a_2} \vec{u}_1 - \frac{a_3}{a_2} \vec{u}_2 - \dots - \frac{a_k}{a_2} \vec{u}_k = \vec{u}_2$$

jinými definicij definice lin. závislosti

Vektory  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  jsou lin. závislé, pokud existuje rovnice

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

ma' řešení  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$

triviální řešení

$$0 \vec{u}_1 + 0 \vec{u}_2 + \dots + 0 \vec{u}_k = \vec{0} \quad \text{viz dý}$$

(21) Kdy je vektor  $\vec{u}$  lineárně závislý?  
 $\lambda \vec{u} = \vec{0}$

ma pouze křiv řešení  $1 \cdot \vec{u} \neq \vec{0}$   $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

$\vec{u}$  je lineárně závislý  $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$   $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Kdy vektory  $u_1, u_2$  jsou lineárně závislé?

$$u_1 = k u_2$$

Kdy vektory  $u_1, u_2, u_3$  jsou lineárně

závislé  $u_3 = a u_1 + b u_2 \in [u_1, u_2]$

Pláve když křiv je podmi řešení pak se její a počítá křiv

