

Teorema: se vektorski prostor U je konačno dimenzion, n -torka u linearno nezavisnih vektora u_1, u_2, \dots, u_n čini u generaciju.

Primer $U = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1)$$

$$u = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3 \in [u_1, u_2, u_3]$$

$$\mathbb{R}^3 = [u_1, u_2, u_3]$$

Primer $U = \mathbb{R}_3[x]$

n generacija polinoma $1, x, x^2, x^3$ je konačno dimenzion

Primer $U = C[0, 1]$ prostor funkcija na intervalu $[0, 1]$, koje nemaju konačnu dimenziju.

④

Príkald $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ je jnma báre
podaru \mathbb{R}^3

$$(1) \forall u \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

ma ieremi

$$(2) \quad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \vec{0}$$

ma pame kisiálem ierem.

$$u = (b_1, b_2, b_3)$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right)$$

→ Euklidy's
ieremi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

→ je kisiálem ieremi
jedine'z

⑧ Všetka o vyběru lín nésárnych vektů

Necht $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ jsou lín nésárny vektory a necht $u_1, u_2, \dots, u_l \in V$ jsou nějaké další vektory. Potom lze z vektů u_1, u_2, \dots, u_l vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že platí

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou línární nésárny

(2) $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_l]$

Poznámka $N \subseteq M$ jsou línární nésárny vektory. Pro lín galy platí $[N] \subseteq [M]$.

⑧ Úkázka věty se dala indukci podle l , tj. podle počtu vektorů m .

$l = 1$ Máme vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1$ takové, že v_1, \dots, v_k jsou L -N

Dva případy

(a) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1$ jsou L -N

Podle u_1 dáme mezi vektory μ jasno, že platí.

- $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1$ jsou L -V

- $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_1] = [v_1, v_2, \dots, v_k, \underbrace{u_1}_L]$

(b) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1$ jsou L -Z

$\exists a_1, a_2, \dots, a_k, b_1 \in K$, některé z nich $\neq 0$ tak, že

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 = \vec{0}$$

⑩ Indukční krok

Předp. se věta platí pro $l-1 \geq 1$.

Mějme $v_1, \dots, v_k \in V$ a $u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_l$ nějaké vektory z U .
Podle ind. předpokladu můžeme z vektorů u_1, u_2, \dots, u_{l-1} vybrat m_{i_1}, \dots, m_{i_r} tak, že

- $v_1, \dots, v_k, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}$ jsou $\perp N$

- $[v_1, \dots, v_k, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-1}]$

Redukujeme opět dvě možnosti:

(a) $v_1, \dots, v_k, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, u_l$ jsou $\perp N$

V tomto případě vektor u_l vybereme.

(A) • $n_1, \dots, n_k, m_{i_1}, \dots, m_{i_s}$ jsou $\mathbb{L}N$

• $[n_1, n_2, \dots, n_k, m_{i_1}, \dots, m_{i_s}] = [n_1, \dots, n_k, \overset{\text{množka}}{m_{i_1}, \dots, m_{i_s}}] = [w_1, \dots, w_k, m_{i_1}, \dots, m_{i_s}]$
 podle ind. předp

Tím je důkaz hotov

Počítání algoritmus, který provede předchozí výběr
 má vzhled $\approx \mathbb{K}^m$.

$w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{K}^m$ Chceme najít indexy i_1, i_2, \dots, i_s tak, že

• $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_s}$ jsou $\mathbb{L}N$

• $[w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_s}] = [w_1, w_2, \dots, w_m]$

15

(1) Vektory w_1, w_2, w_4 jsou LN.

Souhvata $x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_4 w_4 = 0$ má pouze triviální řešení:

Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} w_1 & w_2 & w_4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{řádky ERO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 2 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}$$

Tedy w_1, w_2, w_4 jsou LN

(2) Vektor w_3 je lineární kombinací předcházejících, tj. w_1 a w_2 .

Zpíšeme, zda souhvata

$$\begin{array}{l} \text{Matice soustavy} \\ \left(\begin{array}{cc|c} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{\text{řádky ERO}} \begin{array}{l} x_1 w_1 + x_2 w_2 = w_3 \text{ má řešení} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} [w_1, w_2, w_4] \\ = [w_1, w_2, w_3, w_4] \end{array}$$

Definice dimenze

Necht U je vektorovy prostrek nad K . Dimenze prostreku U nad K je pocet prvku nejake baze prostreku U .

(2 ruznych dusedhu plyne, ze je jedna, ktera bazi vybereme.)

Primer: $\dim_{\mathbb{K}} U$

Prıkklady

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$$

baze $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$$

baze $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ty index}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1$$

$x^n, x^{n-1}, \dots, x, x^0 = 1$

