

Štěr nřkova vřba.

Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n] \subseteq U$.

Jedliže v_1, v_2, \dots, v_k jsou lřm nesaisřbř, pak $k \leq n$.

Dřkaz. Nepřřmřj

Mřdř implikace v_1, v_2, \dots, v_k jsou $\perp N \Rightarrow k \leq n$

dokážeme její otřmřnu. $k > n \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou $\perp Z$.

Nechť $k > n$. Přime, ře $v_i \in [u_1, u_2, \dots, u_n]$, pak

$$v_i = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \dots + a_{ni}u_n = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, k$
 \sim

(9*) \Rightarrow (2) Def nica dimenze : Nockl' U je konecna dimenzionalna.

Pač $\dim_{\mathbb{K}} U =$ počet prvku nejake báze

4 UŽITEČNÉ VĚTY O BÁZI

① Nockl' $\dim_{\mathbb{K}} U = \underline{n}$. Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_n \in U$ jsou LN, pač jsou bázi.

② Nockl' $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Jestliže $[v_1, v_2, \dots, v_n] = U$, pač v_1, v_2, \dots, v_n jsou bázi.

③ Nockl' $U \subseteq V$ je podprostor. Nockl' V má konečnou dimenzi. Pač U má také konečnou dimenzi a $\dim_{\mathbb{K}} U \leq \dim_{\mathbb{K}} V$

④ Nockl' $U \subseteq V$ je podprostor. Jestliže $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$, pač $U = V$.

ku 7

(*) \Rightarrow (2) jasne

(*) \Rightarrow (1) Nechť $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = \vec{0}$

hmo, že $0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n = \vec{0}$

Podle (*) musíme být vyjádřeni vektoru $\vec{0}$ pomocí u_1, \dots, u_n jednorázově, proto

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Vektory u_1, \dots, u_n jsou tedy lin. nezávislé

(1) $\&$ (2) \Rightarrow (*)

(2) implikuje existenci

žádného jednorázového. Nechť pro $u \in U$ je

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

Odečtením

$$\vec{0} = (a_1 - b_1)u_1 + (a_2 - b_2)u_2 + \dots + (a_n - b_n)u_n$$

№ 9
Príklad $U = \mathbb{R}_2[x]$ $\alpha = (1, x-1, (x-1)^2)$ base $\mathbb{R}_2[x]$
 $(x^2 + x - 1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x^2 + x - 1 = 1 \cdot 1 + 3(x-1) + 1(x-1)^2$$

$$x^2 + x - 1 = a \cdot 1 + b(x-1) + c(x-1)^2$$

Porovnáme koeficienty u rovných mocnín

$$x^2: \quad 1 = c$$

$$x: \quad 1 = b - 2c$$

$$1: \quad -1 = a - b + c$$

Typický príklad. Najprv raziadruce
 nehlau n dano kási.

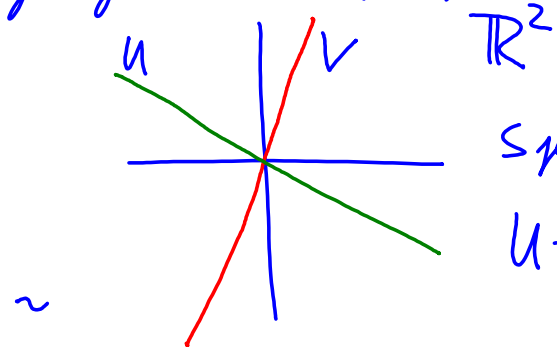
du. 11 Průnik a součet podprostorů

Věta 1.1. V daném vektorovém prostoru V nad K

Věta Průnik $U \cap V$ podprostorů je opět vektorový podprostor.

Důkaz. Jednoduchý, každý vektor $u \in U \cap V$

je jedinečně určen v obou podprostorech U a V



Sjednocení těchto dvou podprostorů není podprostor.

$U+V = \mathbb{R}^2$ podprostor

na 13
Príklad $W = \mathbb{R}^4$ $U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$
 $V = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4 \}$

Indim, je $U + V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \nwarrow U & & \nwarrow V & \nwarrow V' \\ \nwarrow & & \nwarrow & \nwarrow \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow U & & \uparrow V & \cdot \end{matrix}$

Definice Pochybné, je rozklad $U + V$ je direktný, pokiaľže
 $U \cap V = \{ \vec{0} \}$.

Pdem píše $U \oplus V$ namiesto $U + V$

přítel — Necht $U, V \subseteq W$ jsou podprostory. Součet $U+V$ je dimenzní,
ma-li vždy platí

$$\forall w \in U+V \exists! u \in U \exists! v \in V \quad w = u+v$$

Důkaz Smaňte se!

Věta o dimenzi průniku a součtu podprostorů

Necht U a V jsou podprostory ve vektorovém prostoru W konečné
dimenze. Pak platí

$$\dim_{\mathbb{K}}(U+V) + \dim_{\mathbb{K}}(U \cap V) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} V$$

dr. 17 Obvykle chceme najít $U+V$. To znamená, že a vektorů

$u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l$ musíme najít LN se stejným dim. oborem pomocí algoritmu, který jsme měli minule

Výpočet průniku

$$V_1 = [u_1, u_2, u_3] \quad V = [v_1, v_2, v_3]$$

$$w \in U \cap V \text{ právě když } a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2 - b_3 v_3 = \vec{0}$$

Nedáme řešení tabulky pomocí. To vede k řešení soustavy homog. rovnic.

$$\begin{array}{l} \text{Nechť } p \text{ řešení máme} \\ b_3 = s \\ b_2 = p \\ b_1 = 3p + 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1 = \\ a_2 = \\ a_3 = \end{array}$$

