Důkaz věty o dimenzích průniku a součtu podprostorů

Vekt. prostor $\mathbb{W}$ nad $\mathbb{K}$, $U, V \subseteq \mathbb{W}$ jsou vektorové podprostory

Dokážeme, že pokud $\dim \mathbb{W} < \infty$, pak

$$\underbrace{\dim(U+V)}_{p+k+n} + \underset{p}{\dim (U \cap V)} = \underset{p+k}{\dim U} + \underset{p+n}{\dim V}$$

Nejdříve zvolíme bázi podprostoru $U \cap V$, nechť je

$w_1, w_2, \dots, w_p$ .... báze $U \cap V$

Tuto bázi rozšíříme na bázi prostoru U

$w_1, w_2, \dots, w_p, u_{\cancel{p}+1}, u_2, \dots, u_k$ .... báze U

Analogicky doplníme vektory $w_1, \dots, w_p$ na bázi podprostoru V

$w_1, w_2, \dots, w_p, v_1, v_2, \dots, v_n$ ... báze V

str 3

2) Vektory $w_1 \dots w_p, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m$ jsou LN.
a)

Uvažujme rovnici s neznámými $a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_k, c_1, \dots c_m$

$$(*) \qquad a_1 w_1 + \dots + a_p w_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m} = \vec{0}$$

$$U \ni a_1 w_1 + \dots + a_p w_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = -c_1 v_1 - \dots - c_m v_m \in V$$

Daný vektor leží v $U \cap V$, proto existují $d_1, d_2, \dots d_p$ tak, že

$$a_1 w_1 + \dots + a_p w_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = d_1 w_1 + d_2 w_2 + \dots + d_p w_p$$

$$(a_1 - d_1) w_1 + \dots + (a_p - d_p) w_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = \vec{0}$$

Vektory $w_1, \dots, w_p, u_1, \dots, u_k$ jsou LN, proto

$$a_1 - d_1 = a_2 - d_2 = \dots a_p - d_p = \underline{0 = b_1 = b_2 = \dots = b_k}$$

Dosadíme do $(*)$ $\quad a_1 w_1 + \dots + a_p w_p + c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = \vec{0}$

Vektory $w_1, \dots w_p, v_1, \dots, v_m$ jsou LN, proto $\underline{a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0 = c_1 = \dots c_m}$.

ú 5

(2) $\varphi(\vec{o}_U) = \vec{O}_V$

Dk $\varphi(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot \varphi(\vec{u}) = \vec{O}$

$\varphi(\vec{O}) =$

(b) $\underline{\varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2)} = \varphi(a_1 u_1) + \varphi(a_2 u_2) = \underline{a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2)}$

(b) $\Leftrightarrow$ (1) $\wedge$ (2)

(c) Indukcí lze dokázat, že

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(u_i)$$

Ad 7 Pro

(7) $k=1$ dostáváme $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1\ a_2 \ldots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

(3) $n = k = 1$ $\qquad \varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ lineární

$$\varphi(x) = ax$$

(4) $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ lineární funkce ve smyslu středoškolské matematiky

$$\varphi(x) = ax + b$$

$$\varphi(0) = b$$

Takové φ je lineární zobrazení podle naší definice jenom pro $b = 0$

Dk 9

(7) Analogicky lze dokázat, všechna lin. zobrazení

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ jsou tvaru

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(8) Dále lze dokázat, že všechna lin. zobrazení

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ jsou tvaru

$$\varphi(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(9) $U = C^1(\mathbb{R})$ diferencovatelné funkce na $\mathbb{R}$

$V = C(\mathbb{R})$ spojité funkce

$\varphi(f) = f'$ je lineární $C^1(\mathbb{R})$ do $C(\mathbb{R})$

$(f+g)' = f' + g'$

$(af)' = af'$

Př 11

Lineární zobrazení mezi prostory konečné dimenze

<u>Věta</u> Nechť U je prostor konečné dimenze a nechť $\varphi : U \to V$ je lineární.
Pak φ je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech nějaké báze

<u>Dk</u> $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_k)$ je nějaká báze
$u \in U$ $\quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$
Potom $\varphi(u) = \varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \dots + a_k \varphi(u_k)$

Toto jsme používali při popisu všech lin zobrazení z $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$
V $\mathbb{K}^n$ vezmeme bázi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ je určena
$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n) \in \mathbb{K}^k$

úl 13

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \quad \varphi(x) = Ax$

$\psi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^r \quad \psi(y) = By$

$$\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = B(Ax) = (B \cdot A)x$$

<u>Lemma</u>: Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární, $U_1 \subseteq U$ a $V_1 \subseteq V$ vektorové podprostory. Pak

$$\varphi(U_1) = \{\varphi(u) \in V,\ u \in U_1\} \quad \text{obraz podprostoru } U_1$$

a

$$\varphi^{-1}(V_1) = \{u \in U,\ \varphi(u) \in V_1\} \quad \text{vzor podprostoru } V_1$$

jsou vektorové podprostory ve V, resp. v U

Př. 15

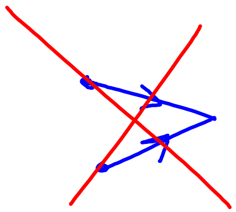
Definice: Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární. Podprostor $\varphi(U) \subseteq V$ se nazývá obraz zobrazení φ a značíme $\mathrm{Im}\,\varphi$ (image).

Podprostor $\varphi^{-1}(\vec{0}) = \{u \in U,\ \varphi(u) = \vec{0}\}$ se nazývá jádro zobrazení φ a značíme $\ker \varphi$ (kernel).

Zobrazení $\varphi: U \to V$ je na (surjekce), jestliže $\varphi(U) = V$

Zobrazení $\varphi: U \to V$ je prosté (injektivní), jestliže

$$\forall u_1, u_2 \in U: \ \varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$$



str 17

Věta o dimenzích jádra a obrazu

Nechť U je prostor konečné dimenze a $\varphi : U \to V$ lineární.

Potom platí
$$\underset{k+l}{\dim U} = \underset{k}{\dim \ker\varphi} + \underset{l\,?}{\dim \operatorname{im}\varphi}$$

Důkaz: $\ker\varphi \subseteq U \qquad \operatorname{im}\varphi \subseteq V$

Nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ je báze $\ker\varphi$.

Nechť $u_1, u_2, \dots u_k, w_1, w_2, \dots w_l$ je báze prostoru U

Dokážeme, že $\varphi(w_1), \varphi(w_2), \dots, \varphi(w_l)$ je báze $\operatorname{im}\varphi$.

Pak už bude formulka dokázána.

dk 19

$$\varphi(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_\ell w_\ell) = \vec{o}$$

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_\ell w_\ell \in \ker \varphi$$

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_\ell w_\ell = b_1 u_1 + \dots + b_k u_k$$ pro vhodná $b_1 \dots b_k$

$$-b_1 u_1 - b_2 u_2 - \dots - b_k u_k + a_1 w_1 + \dots + a_\ell w_\ell = \vec{o}$$

$u_1, u_2, \dots u_k, w_1, \dots w_\ell$ jsou LN vektory. Proto

$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0 = a_1 = \dots = a_\ell$$

Tím jsme dokázali, že $\varphi(w_1), \dots \varphi(w_\ell)$ jsou LN.

Definice: Lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá lin. izomorfismus, jestliže je bijektivní, tj. současně surjektivní a injektivní,

tj. $\varphi(U) = V$, $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$.