Opakování:

$\varphi : U \longrightarrow V$, U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$

φ lineární $\quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \qquad \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

$\qquad\qquad\qquad \varphi(cu) = c\,\varphi(u)$

jádro $\ker \varphi = \{ u \in U,\ \varphi(u) = \vec{0} \} \leq U$

$\qquad \operatorname{im} \varphi = \{ v \in V,\ \exists u \in U,\ \varphi(u) = v \} \leq V$

φ je injektivní $\Leftrightarrow$ $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$

φ je surjektivní $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} \varphi = V$

$\varphi : U \rightarrow V$ je lin. izomorfismus, jestliže φ je lineární a bijektivní.

$\approx$

ad 3

$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \dim U = n = \dim \mathbb{K}^n$

$$\dim U = \dim \ker (\ )_\alpha + \dim \underbrace{\operatorname{im} (\ )}_{\mathbb{K}^n}$$

$$n = 0 + n$$

$$\dim \ker (\ )_\alpha = 0 \Rightarrow \ker (\ )_\alpha = \{\vec{o}\}.$$

Věta:

(1) Nechť φ je lineární izomorfismus $U \to V$, pak $\varphi^{-1} : V \to U$ je rovněž lineární izomorfismus.

(2) Jestliže $\varphi : U \longrightarrow V$ a $\psi : V \longrightarrow W$ jsou lin. izomorfismy, pak $\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$ je rovněž lin. izomorfismus.

Př 5

Všechna zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineární jsou tvaru $\varphi(x) = Ax$.

φ je lin. izomorfismus právě když A má inverzní matici.

Důkaz:

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je lin. izomorfismus. Pak $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je rovněž lineární $\varphi^{-1}(y) = By$. Víme, že

$$x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = B(Ax) = (B\cdot A)x$$ pro všechna $x \in \mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$ $B \cdot A = E$, tedy B je inverzní k A.

Obráceně: Nechť existuje A^{-1}. Pak zobrazení $\psi(y) = A^{-1}(y)$ je inverzní k φ. $\psi\circ\varphi(x) = A^{-1}(A(x)) = x$. $\psi\circ\varphi = id$, $\varphi\circ\psi = id$.

Př. 7 $\quad A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$

Podle formule (*) $\quad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha}\,(u)_\alpha$

jak vypočteme A z (*)?

Postupně dosazujeme za u vektory báze α.

$u = u_1$ $\qquad u_1 = 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + \dots + 0\cdot u_n$

$$(\varphi(u_1))_\beta = A\cdot(u_1)_\alpha = A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = s_1(A) \quad \text{1. sloupec matice } A$$

n. 9

$u \in U \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\left(\varphi(u)\right)_\beta = \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right)\right)_\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, \varphi(u_i)\right)_\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\varphi(u_i)\right)_\beta$$

$$= \left(\left(\varphi(u_1)\right)_\beta \; \left(\varphi(u_2)\right)_\beta \cdots \left(\varphi(u_n)\right)_\beta \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \, (u)_\alpha .$$

Ad. 11 Chceme napsat $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ podle definice

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} (\varphi(1))_\beta & (\varphi(x))_\beta & (\varphi(x^2))_\beta & (\varphi(x^3))_\beta & (\varphi(x^4))_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0)_\beta & (1)_\beta & (2x)_\beta & (3x^2)_\beta & (4x^3)_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Z definice jsme použili.

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \qquad 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \qquad 4x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3$$

~~př~~. 13

Formule (*) $\boxed{(\varphi(u))_\beta} = (\varphi)_{\beta,\alpha}\,(u)_\alpha = \boxed{A\cdot(u)_\alpha}$

$$\begin{tikzcd}
u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \ni \varphi(u) \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
(u)_\alpha \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto A\cdot x"] & \mathbb{K}^m \ni A(u)_\alpha = (\varphi(u))_\beta
\end{tikzcd}$$

Cesta z U do $\mathbb{K}^m$ přes V dává stejný výsledek jako cesta z U do $\mathbb{K}^m$ přes $\mathbb{K}^n$.

Říkáme, že diagram komutuje.

k. 15

(3) Jestliže $\varphi : U \to V$ je lin. izomorfismus, α báze v U, β báze ve V, pak $\varphi^{-1} : V \to U$ má matici

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha} \right)^{-1}$$

to je inverzní matice k matici zobrazení φ.

Důkaz: (1) jednoduchá. Spočítáme z definice nebo z obrázku.

$$\begin{tikzcd} u \in U \arrow[r, "id"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & U \ni u \arrow[d, "(\ )_\alpha"] \\ (u)_\alpha \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto E\cdot x"] & \mathbb{K}^n \ni (u)_\alpha \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow (id)_{\alpha,\alpha} = E$$

ad 17

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi\circ\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto (BA)\cdot x"] & \mathbb{K}^s \end{tikzcd}$$

Komutativní diagram, proto $(\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha} = B\cdot A = (\psi)_{\gamma,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$

(3) Plyne z (2) a (1)

$$id = \varphi^{-1}\circ\varphi \qquad \text{Podle (2)}$$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$$

Podle (1) $\quad E = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha} \Rightarrow (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$

ad 19

V souřadnicích báze α je počítání jednodušší

$$(\varphi(u))_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u)_\alpha \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$