ú 2

<u>Příklad</u> U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

Máme zobrazení „přiřazení souřadnic v bázi α"

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$u \longmapsto (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$$

Např. $U = \mathbb{R}_n[x]$

$$\alpha = (1, x, x^2, \dots, x^n) \qquad (\ )_\alpha : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Toto zobrazení je izomorfismus.

- je lineární
- je nejjednoznačné
- prosté

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \qquad (x_1 u_1 + \dots + x_n u_n)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Př. 4 Věta: Každý vektorový U nad $\mathbb{K}$ dimenze n je izomorfní s $\mathbb{K}^n$
(je izomorfní znamená: existuje lin. izomorfismus $U \to \mathbb{K}^n$).
Vlastnost "být izomorfní" je ekvivalence na množině všech vektorových prostorů.

Dk: Izomorfismus $U \to \mathbb{K}^n$ je dán pomocí lin. izomorfismu $(\ )_\alpha : U \to \mathbb{K}^n$, kde α je nějaká báze prostoru.

Ekvivalence: refl. $id : U \to U$ je lin. izo

sym. $\varphi : U \to V$ lin. izo

$\varphi^{-1} : V \to U$ je také lin. izo

tranz. $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ jsou lin. izo

pak $\psi \circ \varphi : U \to W$ je lin. izo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$b_n (x-1)^n + b_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + b_1 (x-1) + b_0 \longmapsto \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ad 6 Matice lin. zobrazení v daných bázích

Víme, že zobrazení $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^r$ definované $x \longmapsto Ax$, kde A je matice $r \times n$, je lineární.

Nyní toto tvrzení „obrátíme".

Mějme lin. zobrazení $\varphi : U \longrightarrow V$, kde $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je báze prostoru U a $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ je báze prostoru V. Tato data jednoznačně určují matici A typu $r \times n$ tak, že platí pro všechna $u \in U$

$$(*) \qquad (\varphi(u))_\beta = A \cdot (u)_\alpha$$

Tuto matici nazýváme maticí lin. zobrazení φ v bázích α, β a značíme ú 8 Obecně

$$(\varphi(u_i))_\beta = A\,(u_i)_\alpha = A \cdot \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ i\text{-té místo} \rightarrow & \end{array} = s_i(A)$$

Pokud matice A s vlastností $(*)$ existuje, pak

$$(\circ) \quad A = \Big((\varphi(u_1))_\beta \quad (\varphi(u_2))_\beta \quad \ldots\ldots \quad (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

Ukážeme si, že matice A definovaná vzorcem $(\circ)$ splňuje $(*)$ pro všechny vektory $u \in U$.

´dn 10

<u>Definice</u> Matice lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bázích $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ prostoru U a $\beta = (v_1, v_2, \dots v_k)$ prostoru V je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \ (\varphi(u_2))_\beta \ \dots \ (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

kde $(\varphi(u_i))_\beta$ je i-tý sloupec.

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}_4[x]$, $V = \mathbb{R}_3[x]$, $\alpha = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

$\beta = (1, x, x^2, x^3)$ $\quad \varphi : \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$

$$\varphi(p) = p' \quad (\text{derivace})$$

Na příkladu si ukážeme, že platí (*):

$$p(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 11x + 2011$$

$$(p')_\beta = (\varphi)_{\beta\alpha} \cdot (p)_\alpha$$

$$P = (p')_\beta = \left(\ldots + 4x - 11 \right)_\beta = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2011 \\ -11 \\ 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

str. 17

Věta o počítání s maticemi lin. zobrazení

(1) Nechť U je vekt. prostor s bází α. Pak $id: U \to U$ je lin. zobrazení

$$(id)_{\alpha,\alpha} = E$$

(2) Nechť U, V, W jsou vekt. prostory nad $\mathbb{K}$ s bázemi (postupně) α, β, γ.
Nechť $\varphi: U \to V$ a $\psi: V \to W$ jsou lin. zobrazení.
Pak platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$\psi \circ \varphi: U \to W$, a $\cdot$ je násobení matic.

(2) Důkaz pomocí komutativního diagramu

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
\mathbb{K}^m \arrow[r, "x \mapsto A\cdot x"] \arrow[rr, bend right, "B(Ax)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "y \mapsto By"] & \mathbb{K}^s
\end{tikzcd}$$

$(\varphi)_{\beta,\alpha} = A$

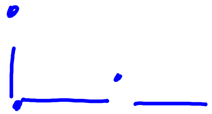
$(\psi)_{\gamma,\beta} = B$

$x \longmapsto (B\cdot A)\, x$

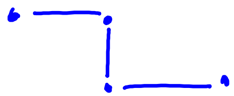
stejné, neboť 1. čtverec komutuje

Cesta 

dá stejný výsledek jako

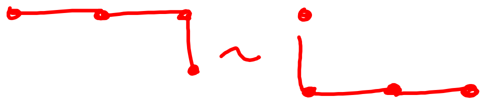


a jako



stejné neboť 2. □ komutuje

Proto jsou stejné i 1. a 2. cesta



Nr 18

<u>Beispiel</u> $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \left(\left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{E}} \left(\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{E}} \right) = \left(\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{E}} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \ (\varphi(u_2))_\alpha \right) = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)_\alpha, \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$