**Domácí úloha ze dne 27.září 2012 (odevzdává se 4.října)**

Uvažme okruh $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ (s operacemi obvyklého sčítání a násobení komplexních čísel, jako vždy $i^2 = -1$). Nechť

$$I = \{a + bi\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z},\ a + 3b \text{ je dělitelné číslem } 11\}.$$

1. Dokažte, že $I$ je ideál okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, a to nejlépe tak, že sestrojíte homomorfismus okruhů vedoucí z okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ do vhodného okruhu tak, aby jeho jádrem byl právě $I$.
2. Rozhodněte, zda je $I$ prvoideál okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
3. Rozhodněte, zda je $I$ maximální ideál okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
4. Pokuste se rozhodnout, zda je $I$ hlavní ideál okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.