**Domácí úloha ze dne 18.října 2012 (odevzdává se 25.října)**

Označme $f = x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^3+x^2+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ jediné dva kubické ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}_2$. Pak $K = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ je osmiprvkové těleso a platí $K = \mathbb{Z}_2(\alpha)$, kde $\alpha = x + (f)$. Rovněž $L = \mathbb{Z}_2[x]/(g)$ je osmiprvkové těleso a platí $L = \mathbb{Z}_2(\beta)$, kde $\beta = x + (g)$. Víme, že dvě konečná tělesa jsou izomorfní, právě když mají stejný počet prvků. Proto existuje alespoň jeden izomorfismus $\varphi : K \to L$.

1. Promyslete si, že tento izomorfismus je jednoznačně určen svou hodnotou $\varphi(\alpha)$, a stručně vysvětlete, proč je skutečně touto hodnotou dán předpis izomorfismu $\varphi$ na celém $K$.

2. Určete, pro které prvky $\gamma \in L$ existuje izomorfismus $\varphi : K \to L$ splňující $\varphi(\alpha) = \gamma$.

3. Na základě tohoto konkrétního příkladu se pokuste formulovat hypotézu pro libovolné prvočíslo $p$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$: kolik existuje izomorfismů mezi dvěma danými $p^n$-prvkovými tělesy? (Svou hypotézu nemusíte dokazovat.)

[Návod pro část 2: uvědomte si, jakou rovnost splňuje prvek $\alpha$ v tělese $K$ a co z toho plyne pro jeho obraz $\varphi(\alpha)$.]