

Domácí úloha z 8.listopadu 2012 (odevzdává se 15.listopadu)

Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ mající kořeny

$$\beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),$$

$$\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),$$

$$\beta_3 = (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),$$

tj. vyjádřete koeficienty A, B, C pomocí koeficientů a, b, c, d .

[Poznámka: tento postup umožňuje řešit polynomiální rovnice 4. stupně, umíme-li řešit polynomiální rovnice 3. stupně (na což máme Cardanovy vzorce). Substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ převedeme daný polynom do tvaru, kdy je koeficient u y^3 nulový. Bez újmy na obecnosti tedy lze předpokládat, že pro daný polynom f platí $a = 0$. Pak kořeny vzniklého kubického polynomu $g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ splňují

$$\beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_2)^2,$$

$$\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_3)^2,$$

$$\beta_3 = (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_4)^2,$$

neboť $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Vypočteme-li $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, dostaneme

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pm\sqrt{-\beta_1},$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \pm\sqrt{-\beta_2},$$

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \pm\sqrt{-\beta_3},$$

odkud snadno dopočítáme všechny kořeny původního polynomu f , například $2\alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_4)$, $2\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_4)$ atd.]