

Domácí úloha z 15.listopadu 2012 (odevzdává se 22.listopadu)

Označme

$$M = \{A \subseteq \mathbb{N}; A \text{ je nekonečná a současně } \mathbb{N} - A \text{ je nekonečná}\}$$

množinu všech nekonečných podmnožin množiny všech přirozených čísel majících v ní nekonečný doplněk. K množině M přidáme další dva prvky, totiž prázdnou množinu a celé \mathbb{N} , a vzniklou množinu uspořádáme inkluzí.

1. Dokažte, že $(M \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \subseteq)$ je svaz (tj. popište, jak vypadají infima a suprema, a vysvětlete, proč jimi skutečně jsou).
2. Rozhodněte, zda je $(M \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \subseteq)$ samoduální svaz (pokud ano, nalezněte nějaký izomorfismus tohoto svazu s duálním svazem, pokud ne, nalezněte nějakou algebraickou vlastnost, kterou tento svaz má a jeho duál ne).
3. Rozhodněte, zda je $(M \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \subseteq)$ úplný svaz (své rozhodnutí řádně zdůvodněte).
4. Rozhodněte, zda je $(M \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \subseteq)$ modulární svaz (i toto své rozhodnutí řádně zdůvodněte).