

**KOMENTÁŘE A OPRAVY K TEXTU  
SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA I  
MARTINA KOLÁŘE**

JIŘÍ ZELINKA

1. FOURIEROVY ŘADY

**str.7:**

Výpočet koeficientů pro komplexní tvar Fourierovy řady vychází ze snadno odvoditelného vztahu

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 2\pi & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

Pak není problém zjistit, že

$$c_k = (f(x), e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

**str.10:**

Zhruba ve třetině strany odspodu ve vztahu, který končí  $= \frac{1}{2}$  je za integrálem navíc člen  $f(x+u)$ .

Na konci důkazu Dirichletovy věty o bodové konvergenci dostáváme vlastně Fourierův koeficient pro funkci  $g$ , kterou by pro úplnou korektnost bylo ještě potřeba dodefinovat na zbytku intervalu (např. nulovou hodnotou). Riemannovo-Lebesgueovo lemma, které v dalším textu chybí, říká, že Fourierovy koeficienty konvergují k nule pro rostoucí  $n$ . Tato skutečnost ovšem bezprostředně plyne z  $L^2$  teorie, neboť součet druhých mocnin absolutních hodnot Fourierových koeficientů je konečný.

**str.13:**

Besselova nerovnost také říká, že posloupnost Fourierových koeficientů leží v prostoru  $l^2$

**str.14:**

V posledním vztahu v důkazu Věty 1.3.6 mají být meze v sumě od  $m+1$  do  $n$ .

V Lemmatu 1.3.7 má sčítací index  $k$  v sumě začínat nulou.

**str.16:**

Mezi důležité vlastnosti symetrických operátorů patří ta, že jeho vlastní hodnoty jsou reálné. Důkaz tohoto tvrzení je poměrně jednoduchý.

**str.18:**

Operátor, kterým se definují Legendrovy polynomy, má i vlastní hodnotu rovnou nule. Její vlastní funkce je pak funkce  $c_1 \log \frac{x+1}{x-1} + c_2$ , která na krajích intervalu  $(-1, 1)$  jde k  $\pm\infty$ . Dá se dokázat, že jedinými ohraničenými vlastními funkcemi tohoto operátoru jsou polynomy. Pak se lehce odvodí, pro jaké vlastní hodnoty tyto polynomy existují.

Ověření, že funkce  $\frac{d}{dx^n}(x^2 - 1)^n$  skutečně splňují operátorovou diferenciální rovnici není zcela jednoduché. Dá se to dokázat např. s použitím funkce  $\omega_{n+1}(x) = \frac{d}{dx^n}(x^2 - 1)^{n+1}$ , přičemž si dvojným způsobem vyjádříme její druhou derivaci a oba vztahy porovnáme.

Když už je řeč o Legendrových polynomech, můžeme uvést i rekurentní vztah, který se zpravidla používá pro jejich výpočet:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

**str.20:**

V předpokladech Fejérové věty chybí  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Bez tohoto předpokladu není možné spojitě periodicky rozšířit vně intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

**str.26:**

V Lemmatu 2.1.2 je spojitost funkce  $f$  dokonce stejnoměrná.

**str.27:**

V Lemmatu 2.1.4 za předpokladu  $R \neq 0$  (tedy  $R$  může být i záporné) dostáváme

$$\widehat{f}_R(\xi) = \frac{1}{|R|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right).$$

**str.31:**

Ve třetím vztahu shora na konci má být  $\xi$  místo  $x$ .

**str.32:**

Druhý vztah dospodu pro  $\hat{\phi}$  lze snadno dokázat použitím definičního vztahu pro Fourierovu transformaci. Vyhneme se tak problémům se současným posunem argumentu a jeho násobením.

**str.33:**

V integrálu v Definicí 2.2.4 má být  $dx$  místo  $d\xi$ .

**str.36:**

V důkazu Centrální limitní věty má být na dvou místech  $\xi \rightarrow 0$  místo  $\xi \rightarrow \infty$

**str.45:**

V posledním vztahu před sekci 4.3 chybí znaménko  $-$ .

Diracova delta funkce  $\delta_0$  je distribuce, pro níž  $\delta_0(\phi) = \phi(0)$ , což na prostoru funkcí  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  je spojitý lineární funkcionál. Je jasné, že tento funkcionál není reprezentován žádnou „slušnou“

funkcí  $g$ , pro níž by platilo  $\delta_0(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)dx$ . Nicméně

hodnotu  $\phi(0)$  dostaneme jako limitní hodnotu pro  $\varepsilon \rightarrow \infty$  konvoluce  $\phi$  s nějakou vhodnou aproximací identity (viz sekce 2.2). Proto si lze Diracovu funkci představit jako limitu aproximace identity pro  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , což by byla funkce všude nulová s nekonečnou hodnotou v nule, přičemž její integrál přes celou reálnou osu je roven jedné.