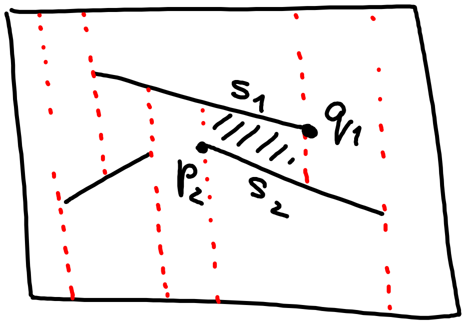
LICHOBĚŽNÍKOVÁ MAPA ①

S množina úseček $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

$S_i = \{s_1, \dots, s_i\}$

Pro S_{i-1} známe lich. mapu $\mathcal{T}(S_{i-1})$ a vyhledávací strukturu $\mathcal{D}(S_{i-1})$ a chceme sestrojit $\mathcal{T}(S_i)$ a $\mathcal{D}(S_i)$



top s_1

bottom s_2

right point q_1

left point p_2

2

Přidáváme s_i, chceme změnit $T(S_{i-1})$ na $T(S_i)$
a aktualizovat vyhledávací strukturu.

Po přidání s_i najdeme posloupnost sousedních lichoběžníků

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_k$$

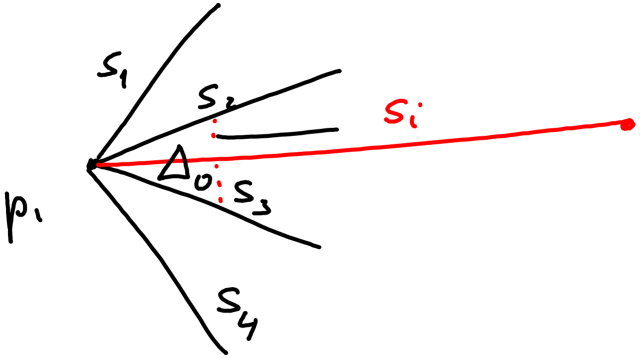
$$p_i \in \Delta_0, \quad q_i \in \Delta_k$$

(1) p_i není konc. bodem $s_1, s_2, \dots s_{i-1}$

V tomto případě použijeme $\mathcal{D}$ k nalezení Δ_0.

(2) 

p_i je konc. bod některé z úseček $s_1, s_2, \dots s_{i-1}$

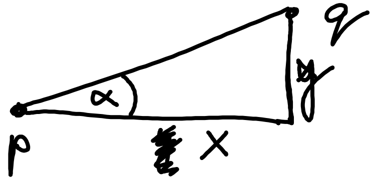


3

Chceme najít Δ_0

Porovnáním směrnic úseček s_1, s_2, s_3, s_4 se směrnicí úsečky s_i

$$\text{směrnice}(s) = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}$$



$$\frac{y}{x} = tg\,\alpha$$

Zjistíme, že

$$\text{směrnice}(s_3) \leq \text{směrnice}(s_i) \leq \text{směrnice}(s_2)$$

Algoritmus Follow Segment

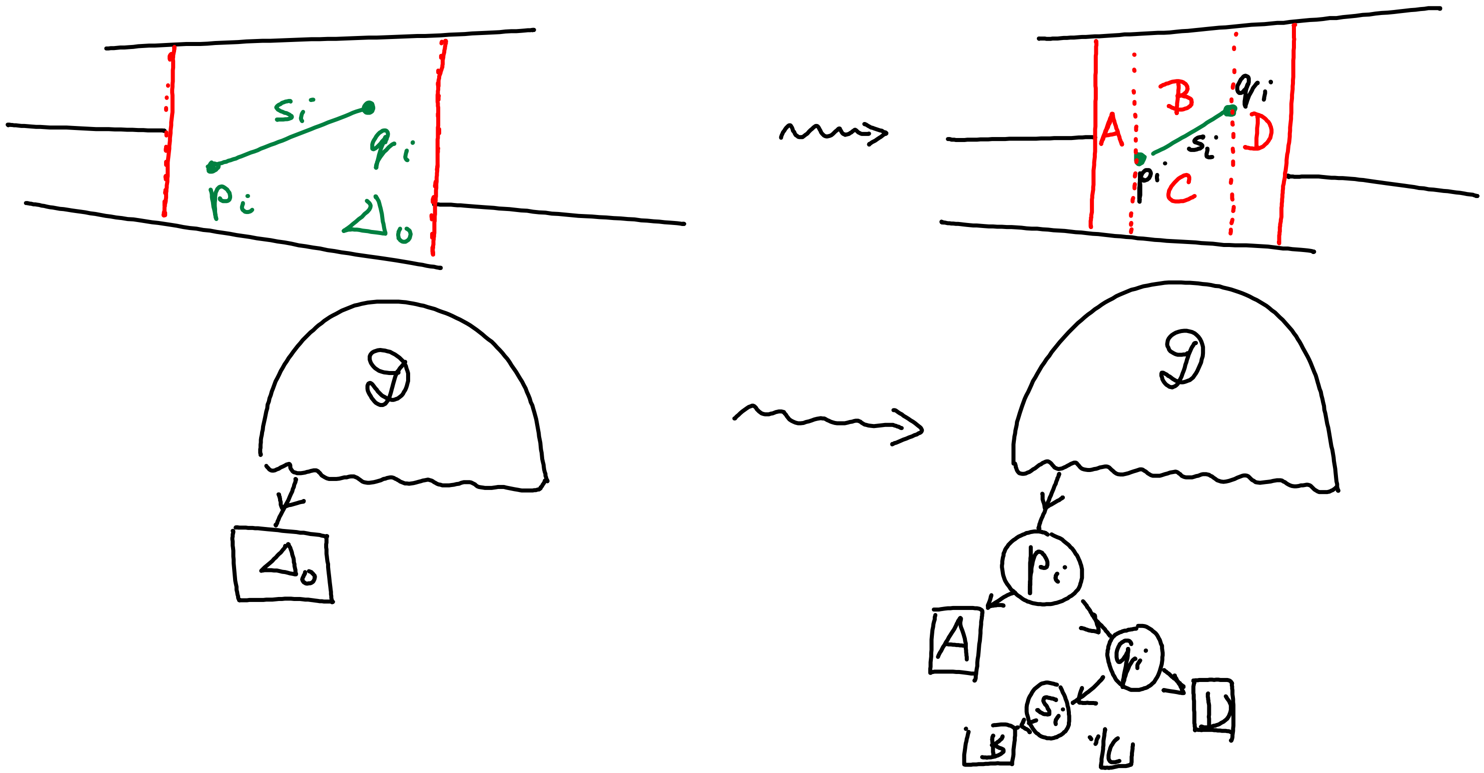
29

Δ_0 má top s_2, bottom s_3, left point p_i

Tím je Δ_0 určeno jednoznačně

4

Změna $\mathcal{T}(S_{i-1})$ na $\mathcal{T}(S_i)$ a aktualizace $\mathcal{D}$



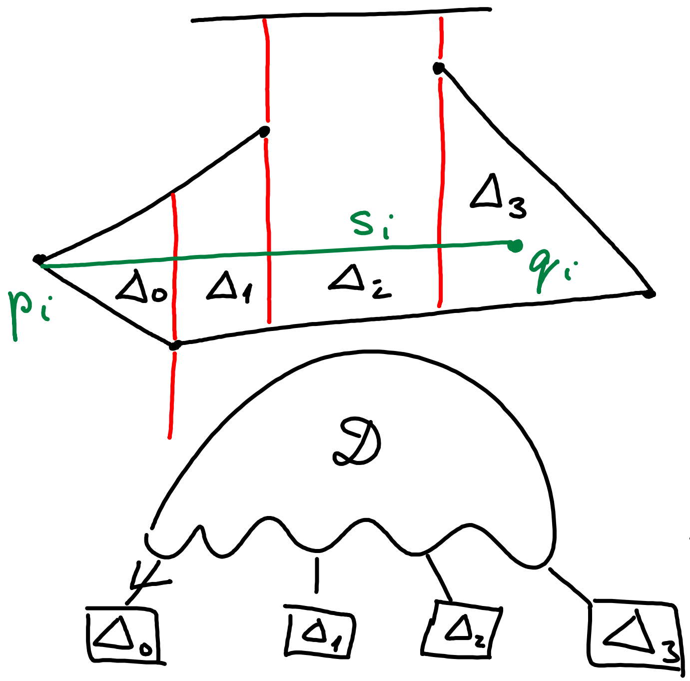
$\mathcal{T}$

prodloužení

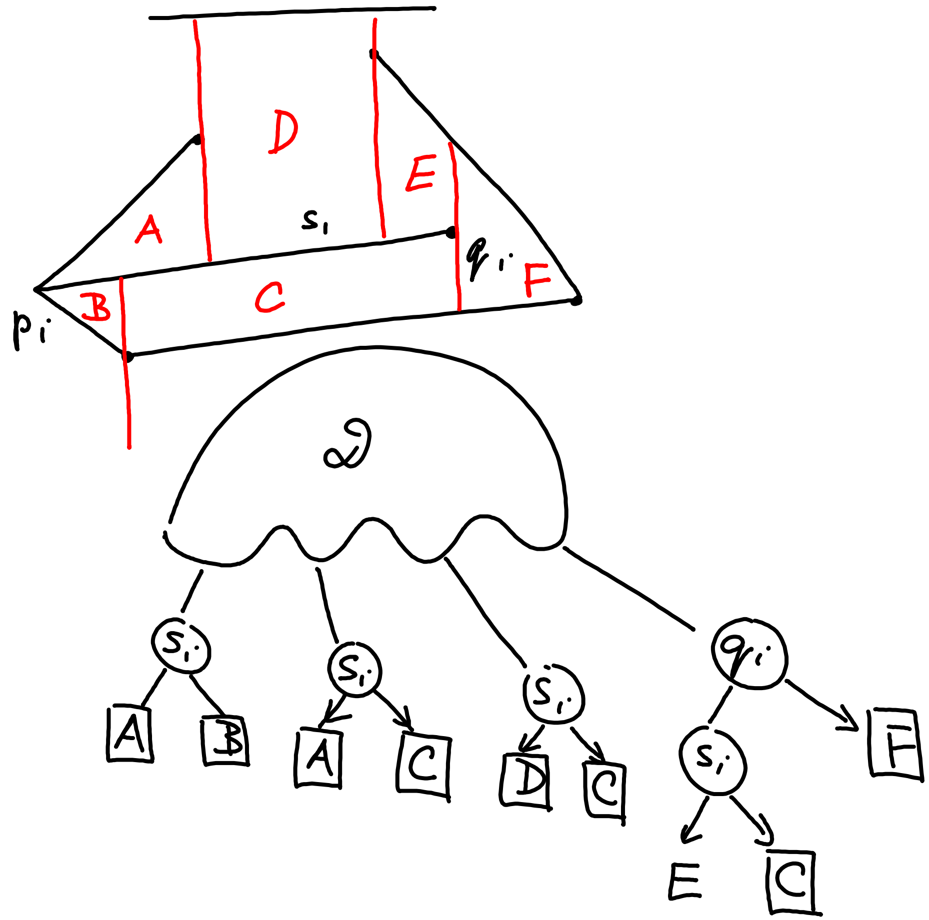
o

0, 1, 2, 3 u

5



Algoritmus str. 28



(6)

Věta. Popsaný náhodnostní algoritmus má

očekávané nároky na paměť $O(n)$
očekávaný čas konstrukce $O(n \log n)$
očekávaný čas vyhledávání $O(\log n)$.

Důkaz 3. části:

X náhodná veličina nabývající hodnot $k_1, k_2, \ldots, k_r$.
X délka cesty v $\mathcal{D}$ pro vyhledání bodu q
hodnoty $0, 1, 2, \ldots 3n$
Střední hodnota náhodné veličiny X

7

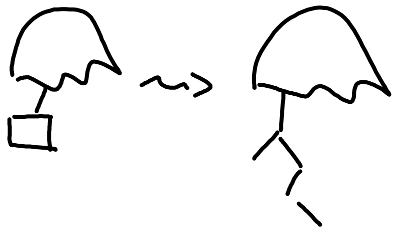
$$EX = h_1 \cdot (\text{pravděpodobnost, že } X = h_1) + h_2 \cdot (p(X = h_2)) +$$
$$\ldots\ldots + h_k (p(X = h_k))$$

V našem případě je EX průměrná délka cesty

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, kde X_i je počet uzlů přidaných do cesty v kroku i (po přidání úsečky s_i)

X_i je náhodná veličina s hodnotami

0, 1, 2, 3 (viz předchozí



$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i$$

8

$$EX_i = 0 \cdot (p(X_i = 0)) + 1 \cdot (p(X_i = 1)) + 2 \cdot (p(X_i = 2)) + 3 \cdot (p(X_i = 3))$$

$$\leq 3\,(p(X_i \neq 0))$$

Chceme spočítat pravděpodobnost, že $X_i \neq 0$.

q je nějaký bod

$X_i(q) \neq 0$ jestliže $q \in \Delta_1^q \in \mathcal{T}(S_{i-1})$

a současně $\Delta_1^q \notin \mathcal{T}(S_i)$, $q \in \Delta_2^q \in \mathcal{T}(S_i)$

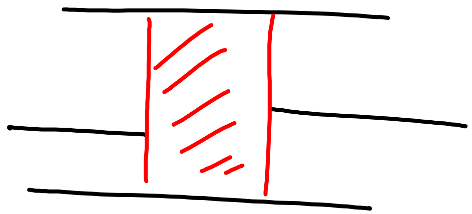
$\mathcal{T}(S_i)$ náhodně odstraníme jednu úsečku

vršek, spodek nebo levý, pravý bod určen s_i

$p(X_i \neq 0) = p(\Delta_2^q$ je určeno pomocí $s_i)$

(9)

$p(X_i \neq 0) = p($ první $\Delta \in T(S_i)$ zanikne při odstranění náhodné úsečky $)$



odstraněná úsečka je top .. $p = \frac{1}{i}$

odstraněná úsečka je bottom $p = \frac{1}{i}$

odstr. úsečku určuje leftp $p = \frac{1}{i}$

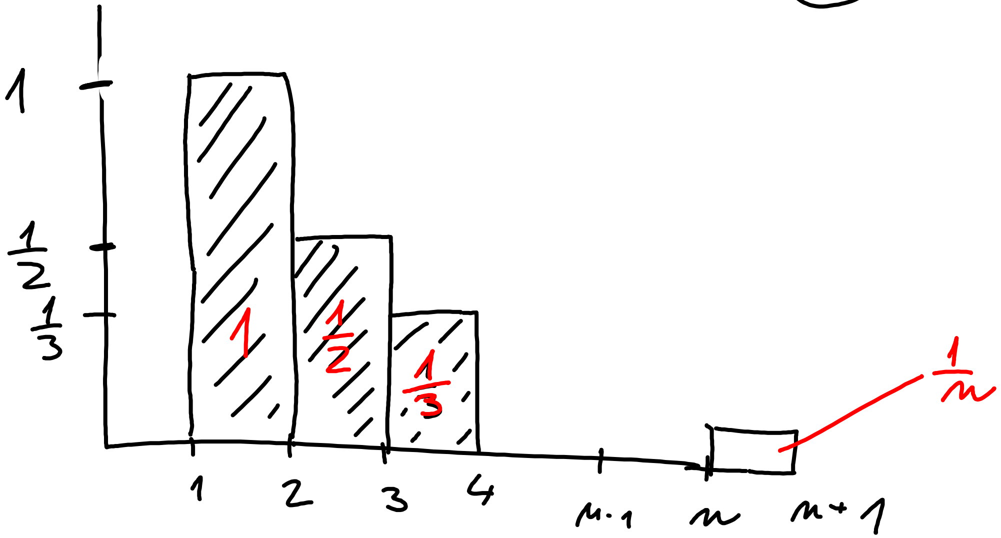
———— // ———— rightpoint $p = \frac{1}{i}$

$$p(X_i \neq 0) \leq \frac{4}{i}$$

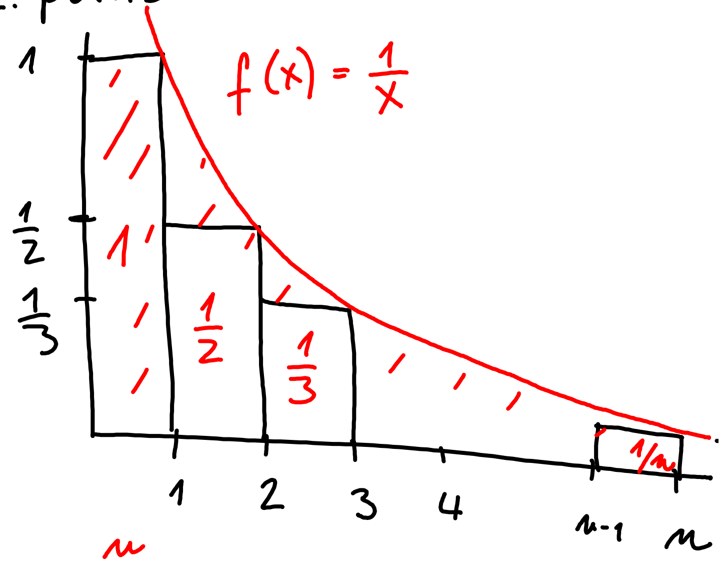
$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i \leq \sum_{i=1}^{n} 3\left(p(X_i \neq 0)\right) \leq \sum_{1}^{n} \frac{12}{i} = 12\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \leq 12(\log$$

$$= O(\log$$

10



2. pokus



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \leq 1+\int_1^n f(x)\,dx = 1+\int_1^n \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 1+\left[\log x\right]_1^n = 1+\log n-\log 1 = 1+\log n$$

11

Odstranění předpokladu, že pro $p_i \neq p_j$ je
$(p_i)_x \neq (p_j)_x$

Pomocí tzv shear transformation

$\varepsilon > 0$ malé

shear transformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} x + \varepsilon y \\ y \end{pmatrix}$

Tato transformace převede ~~body~~ p, q, $p \neq q$ $p_x = q_x$
na body $\varphi(p), \varphi(q)$ takové, že $\varphi(p)_x \neq \varphi(q)_x$.

Máme body $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ Určitě lze zvolit $\varepsilon > 0$ dostatečně
malé t.ž., že $p_x < q_x \Longrightarrow (\varphi(p))_x < (\varphi(q))_x$

12

Vhodné ε lze najít, ale my ho hledat nepotřebujeme
neboť

$$\varphi(p)_x < \varphi(q)_y \iff p \ll q$$

v lexikografickém uspořádání
nejdřív podle x a pak podle y

V našem algoritmu
při porovnávání x-ových souřadnic bereme totiž lexiko
grafické uspořádání
Při porovnávání y-ových souřadnic nic neměníme

13

Diagramy Voronoia

Post office problem

Úloha

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

je množina bodů v rovině

hledáme rovinné podrozdělení

s oblastmi $V(p_i)$ takovými,

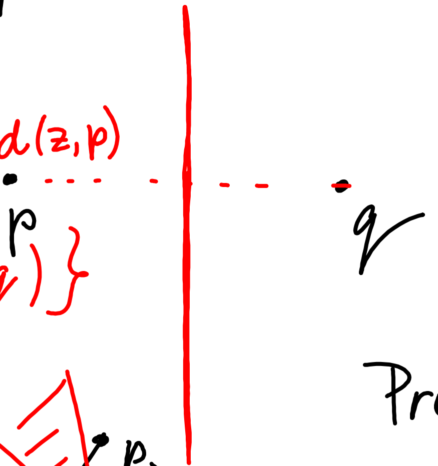
že $\forall x \in V(p_i)$ platí

pro $\forall j \neq i$ $\quad dist(x, p_i) \leq dist(x, p_j)$

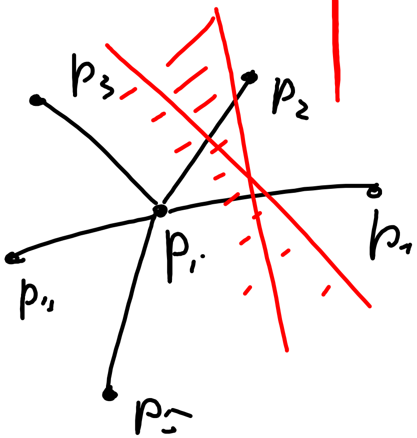
14

Toto podrozdělení se nazývá diagram Voronoia.

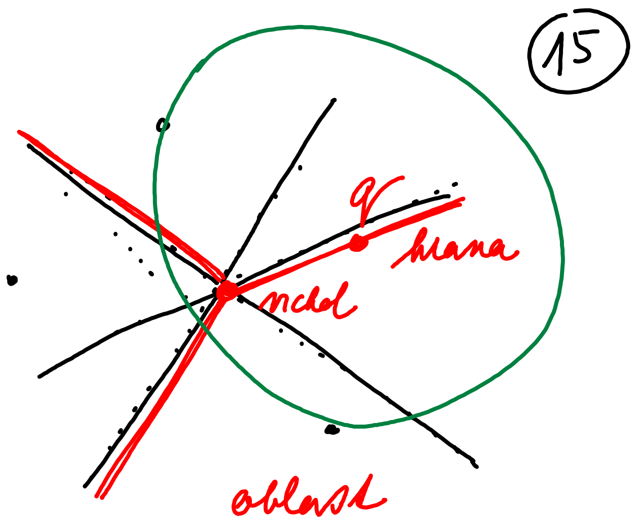
$P(p,q) = \{z \in \mathbb{R}^2 ;\ d(z,p) \le d(z,q)\}$



Osa úsečky p, q dělí rovinu na část, kde body leží blíže k p a část bodů bližších ke q



Proto $V(p_i) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P(p_i, p_j)$



q leží na hraně diagramu Voronoia, a není vrchol
jestliže existuje kružnice se středem q
která prochází právě dvěma body z množiny P
a uvnitř neobsahuje žádný bod

q je vrcholem v diagramu Voronoia, právě když existuje kružnice se středem q, která prochází aspoň 3 body a uvnitř neobsahuje žádný další bod množiny P.