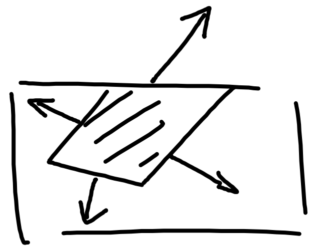
Průnik polorovin ①

Minule jsme dospěli k úloze hledání vektoru $d = (d_x, d_y, 1)$ který splňuje nerovnosti

(*) $$\eta^i_x \cdot d_x + \eta^i_y \cdot d_y + \eta^i_z \leq 0 \qquad i = 1,2,3,\dots,n$$

Řešením nerovnice $ax + by + c \leq 0$, $a^2+b^2>0$ je polorovina.



Hledáme-li všechna řešení soustavy nerovnic (*), jde o hledání průniku polorovin. V našem příkladě však stačí najít jedno řešení nebo zjistit, že řešení neexistuje.

2

Dva algoritmy (1) průnik polorovin (algoritmus počítá celý průnik)

(2) algoritmus pro řešení úlohy lin. programování v rovině (jedno řešení)

Průnik polorovin

- metodou rozděl a panuj

n polorovin rozdělíme na $\frac{n}{2}$ a $\frac{n}{2}$ polorovin

průniky C_1 a C_2 a spočítáme průnik C_1 a C_2.

Průnik dvou mnohoúhelníků umíme dělat pomocí překrytí map

C_1 a C_2 jsou n-úhelníky $C_1 \cap C_2$ dostaneme v čase $O(n \log n)$

3

Rekurentní vztah pro časovou náročnost tohoto algoritmu je

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n)$$

Tento vztah vede na časovou náročnost

$$T(n) = O(n \log^2 n)$$

Průnik $C_1 \cap C_2$ lze s využitím toho, že jde o konvexní množiny, udělat lépe, a to v čase $O(n)$

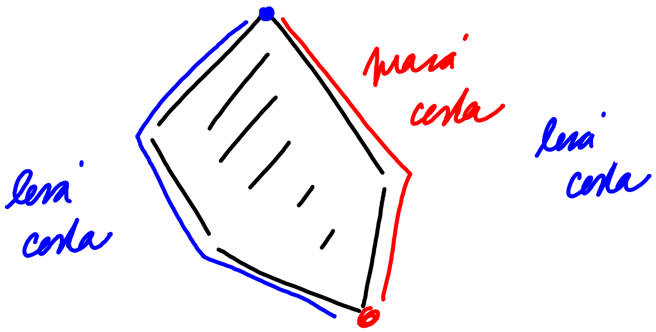
Pak rekurentní vztah bude

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

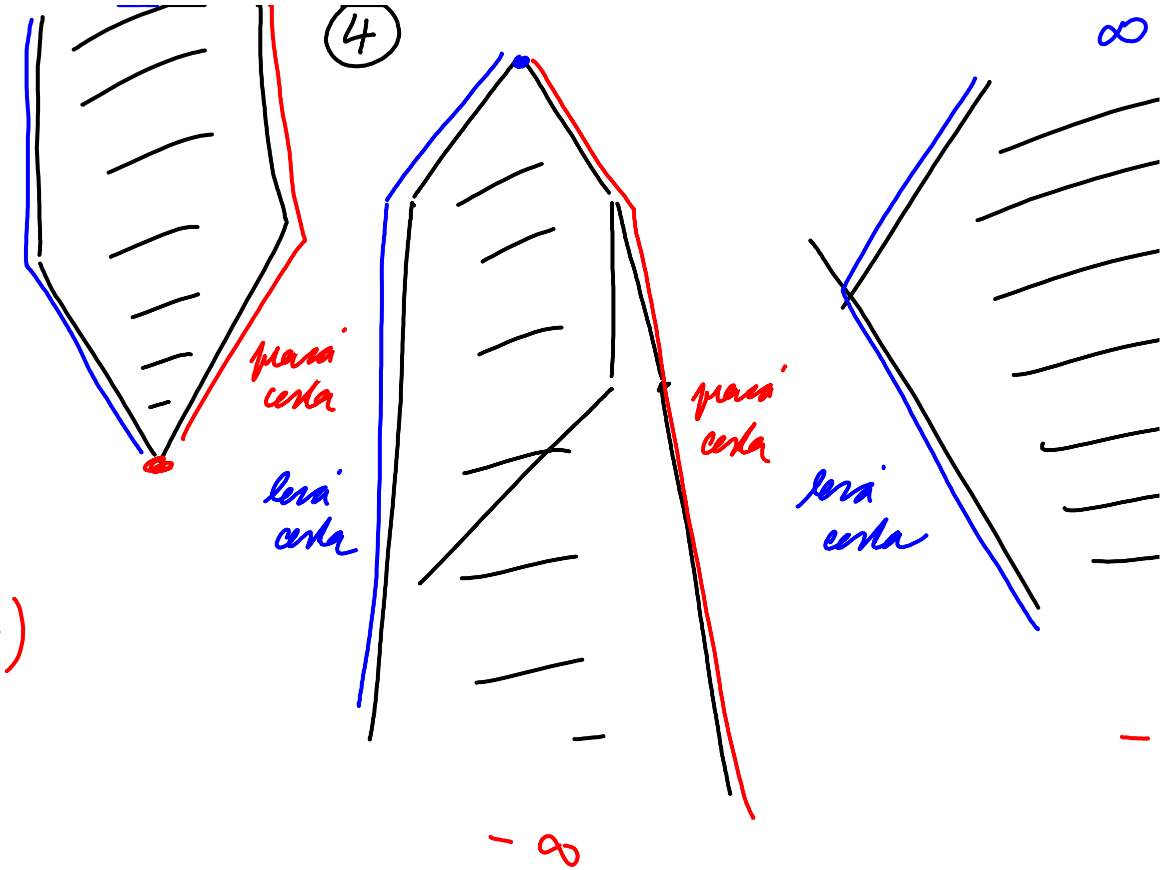
a ten vede k

$$T(n) = O(n \log n)$$

C ... průnik polorovin



- nejvyšší vrchol (nebo ∞)
- nejnižší vrchol (nebo $-\infty$)



5

III C_1 a C_2 jsou dva průniky polorovin, chceme najít jejich průnik

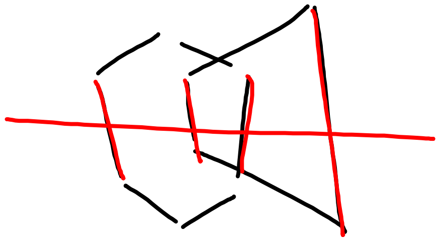
$$C = C_1 \cap C_2$$

Tento průnik najdeme metodou zametací přímky. Události budou vrcholy C_1 a C_2 uspořádané od shora dolů a zleva doprava

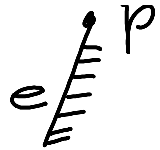
$$p < q \iff p_y > q_y \text{ nebo } p_y = q_y \text{ a } p_x < q_x$$

Známe levé a pravé cesty C_1 a C_2 a ty nám dají frontu událostí v čase $O(n)$ (n počet vrcholů)

V binárním stromu držíme pořadí stran protínajících zametací přímkou.



6

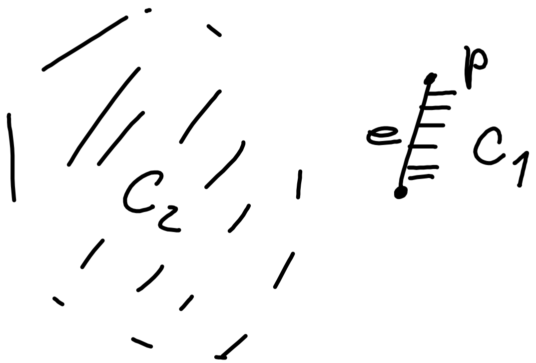


Nyní je potřeba realizovat různé případy

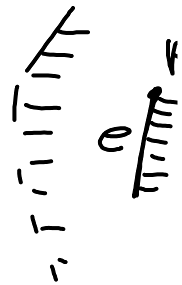
Nechť p je uzel na levé cestě C_1 a e je hrana, která z něj jde dolů

(I) e neleží v C_2

pak p ani e nejsou v $C = C_1 \cap C_2$



(II) e leží celá v C_2, p leží mezi levou a pravou cestou C_2

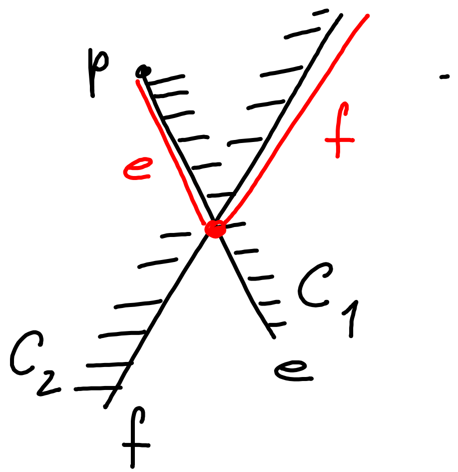


e zařadíme do levé cesty průniku

7

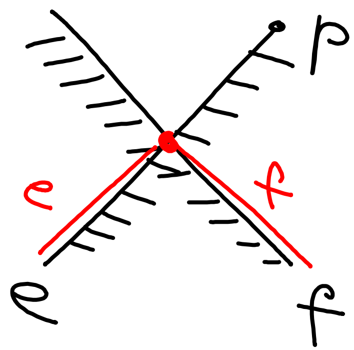
(III) hrana e protíná pravou cestu C_2

(a)



Spočítáme $e \cap f$, to bude dolní bod $C = C_1 \cap C_2$, e bude poslední hrana levé cesty v C a f bude poslední hrana pravé cesty v C

(b)

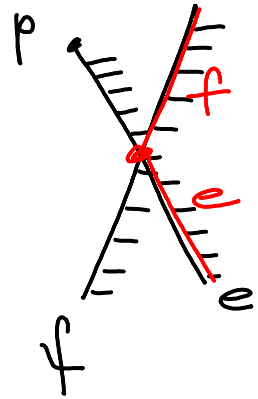


Spočítáme $e \cap f$, to bude horní bod $C = C_1 \cap C_2$, e bude 1. hrana levé cesty a f bude 1 hrana pravé cesty v C

8

(IV) e protíná levou cestu C_2

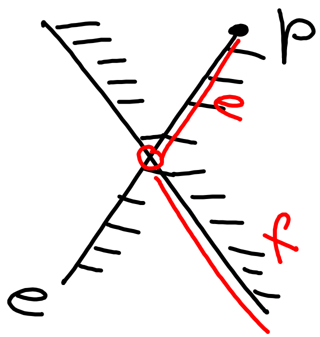
(a)



V tomto případě levá cesta v C bude

$f, f \cap e, e$.

(b)



V tomto případě levá cesta v C je

$e, e \cap f, f$

9

ÚLOHA LIN. PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ

Najít bod o souřadnicích $\underline{x}$ a $\underline{y}$, který maximalizuje lineární funkci

$$f(x,y) = c_1 x + c_2 y$$

na množině (za podmínek)

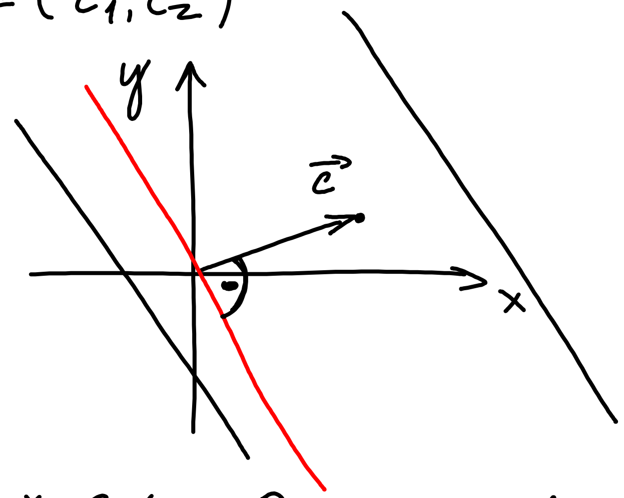
průnik polorovin

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \leq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \leq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y \leq c_n \end{cases}$$

polorovina

10

$\vec{c} = (c_1, c_2)$



$f(c_1, c_2) = c_1^2 + c_2^2 > 0$

Vektor $\vec{c}$ ukazuje, ve kterém směru funkce f roste.

$c_1 x + c_2 y = 0$ přímka procházející počátkem a kolmá na $\vec{c}$

$(c_1, c_2) \cdot (x, y) = 0$

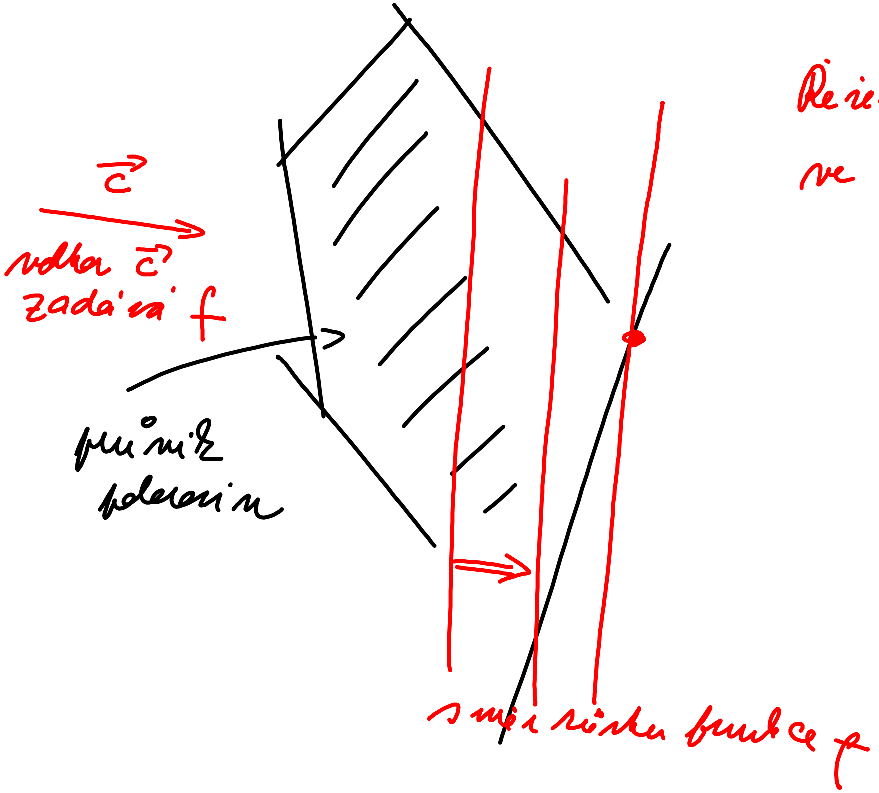
skal. součin

na každé rovnoběžné přímce s touto je $f(x,y) = c_1 x +$ konstantní

11

Geometrická interpretace úlohy lin. programování

Řešením je bod v průniku polorovin nejzazší ve směru vektoru $\vec{c}$

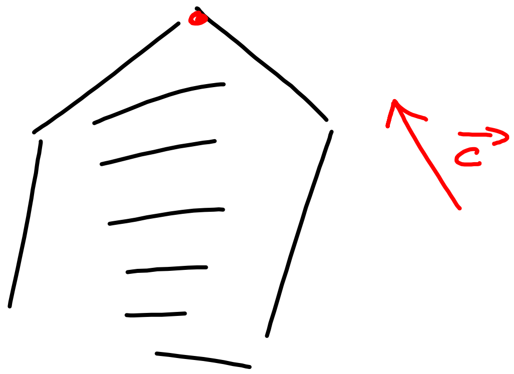


(12)

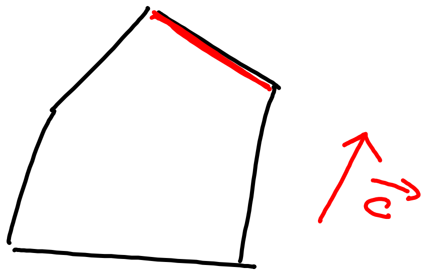
Možná řešení

(1) Průnik polorovin je prázdný

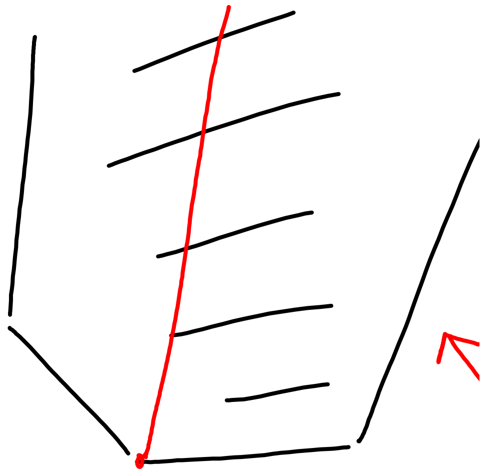
(2) Jediné řešení



(3) Více řešení



(4) V průniku existují polopřímk
a f na ní roste



f zde nenabývá maxi

13

1-dimenzionální úloha lin. programování

Maximalizovat funkci $f(x) = cx$ za podmínek

$c<0 \quad c>0$

$$a_1 x \le d_1$$

$\boxed{\text{Na slidu 9 opravte } c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ v nerovnicích na } d_1, d_2, \ldots, d_n}$

$$a_2 x \le d_2$$

$$\vdots$$

$$a_n x \le d_n$$

$a_i \neq 0$

$c \neq 0$

$I = \{ i \in \{1, 2, \ldots n\}, a_i > 0 \}$

$J = \{ j \in \{1, 2, \ldots n\}, a_j < 0 \}$

$i \in I$

$a_i x \le d_i \iff x \le \frac{d_i}{a_i}$

$a_j x \le d_j \iff x \ge \frac{d_j}{a_j}$

14

Maximalizovat $f(x) = cx$ pro $c > 0$ je totéž jako maximalizovat x.

Maximalizovat $f(x) = cx$ pro $c < 0$ je totéž jako maximalizovat $-x$.

<u>Nechť $c > 0$</u>, maximalizujeme x na množině

$$x \leq \frac{d_i}{a_i} \quad \text{pro } i \in I$$

$$\frac{d_j}{a_j} \leq x \quad \text{pro } j \in J$$

$$x_r = \min\left\{\frac{d_i}{a_i},\ i \in I\right\} \qquad x_r = \infty \text{ pro } I = \emptyset$$

$$x_l = \max\left\{\frac{d_j}{a_j},\ j \in J\right\} \qquad x_l = -\infty \text{ pro } J = \emptyset$$

Úloha je: maximalizovat na intervalu $[x_l, x_r]$.

$x_l > x_r$ nemá řešení (přípust.)

$x_l \leq x_r$ je řešení x_r pokud $x_r \neq \infty$

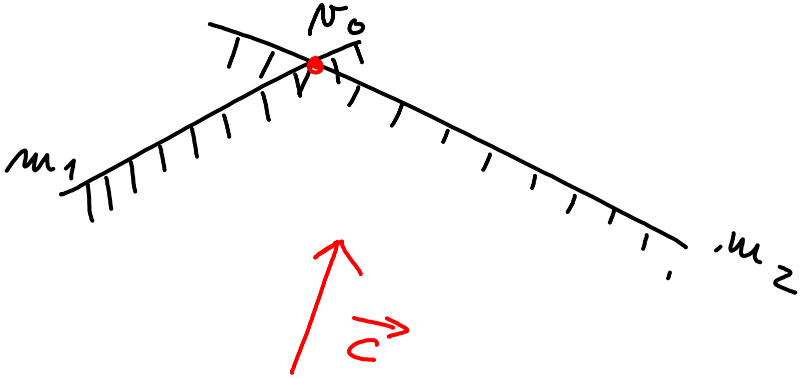
$x_r = \infty$ nemá řešení na $[x_l, x_r] = [$

15

2-dimenzionální omezená úloha

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ je množina polorovin, jejichž hraniční přímky budeme označovat $l_1, l_2, \dots, l_n$.

K těmto polorovinám přidáme další dvě m_1 a m_2 tak, aby funkce $f(x) = c_1 x + c_2 y$ byla omezená na $m_1 \cap m_2$



Tedy funkce f nabývá svého maxima v bodě průniku hraničních přímek m_1 a m_2. Tento bod označme v_0.

16

Hledáme bod průniku

$$C_n = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$$

kde f nabývá svého maxima. To budeme provádět induktivně.

Budeme postupně hledat body $v_1, v_2, \dots, v_n$, ve kterých f nabývá svého maxima na průniku

$$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \dots \cap h_i$$

a přitom ze všech těchto bodů ~~má~~ je v_i maximální v daném lexikografickém uspořádání.

Začneme s v_0 a postupně nalezneme $v_1, v_2, \dots v_n$

17

Známe v_{i-1} a chceme najít v_i.

Lemma:

(1) Jestliže $v_{i-1} \in h_i$, pak $v_i = v_{i-1}$.

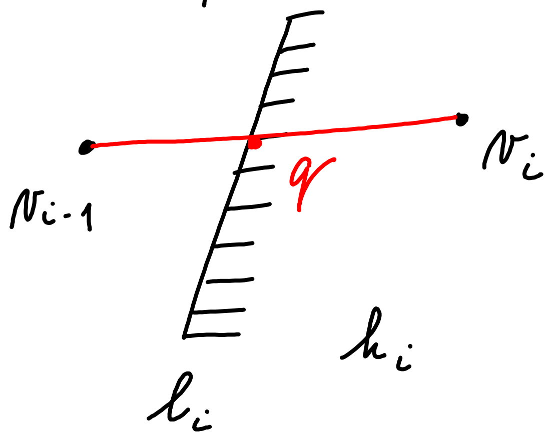
(2) Jestliže $v_{i-1} \notin h_i$, pak v_i (pokud existuje) leží na l_i (hraniční přímka poloroviny h_i) a lze jej nalézt pomocí 1-dim. úlohy lin. programování.

Důkaz: (1) Jestliže $v_{i-1} \in h_i$, pak $v_{i-1} \in C_i = \underbrace{m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \ldots \cap h_{i-1}}_{v_{i-1} \in C_{i-1}} \cap h_i$

$$C_{i-1} \supseteq C_i$$

Jestliže v_{i-1} maximalizuje f na větší množině C_{i-1}, pak musí maximalizovat f i na menší množině C_i.

(2) $v_{i-1} \notin h_i$, předpokládejme, že $v_i \notin \ell_i$



$v_i \in C_i \subseteq C_{i-1}$

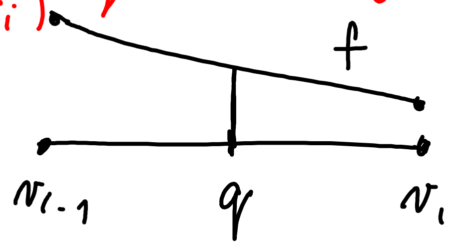
$v_{i-1} \in C_{i-1}$, C_{i-1} je konvexní množina

Proto úsečka $v_{i-1} v_i$ leží v C_{i-1}.

(1) jestliže $f(v_{i-1}) > f(v_i)$

Pak pro bod $q = \ell_i \cap (v_{i-1} v_i)$ platí

$f|_{(v_{i-1}, v_i)}$ je lineární, potom

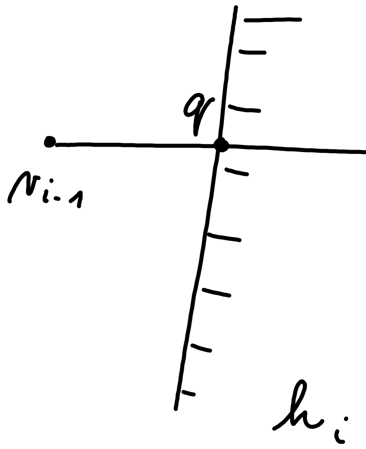


$f(v_{i-1}) > f(q) > f(v_i)$ max na C_i

$q \in C_i$, spor

19

(2) Jestliže $f(v_{i-1}) = f(v_i)$ a v_i je max f na C_i, pak ~~…~~ musí být v lexikografickém uspořádání

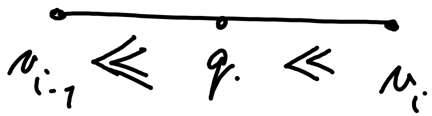


f je konstantní na úsečce $(v_{i-1} v_i)$

$$f(v_{i-1}) = f(q) = f(v_i)$$

v_i je max f a ze všech maxim největší v lexikografickém uspořádání, tj

$$q \ll v_i.$$



Tedy $v_{i-1} \ll q$. Ale v tom případě v_{i-1} nemělo ležet. $q \in h_i$

SPOR