Obsah

Kapitola 1

Základy teorie pravděpodobnosti

Matematické modely ve financích jsou z velké většiny stochastické. Základním nástrojem který využívají je teorie pravděpodobnosti. V této kapitole připomeneme některé základní pojmy a techniky z teorie pravděpodobnosti, tak jak je budeme v dalších kapitolách potřebovat.

1.1 Motivace

Uvažujme jako příklad cenu jedné akcie firmy Apple příští pondělí na konci obchodování. Dnes je pro nás tato cena neznámá, a modelujeme ji tedy jako náhodnou veličinu. Ovšem příští týden v úterý již bude známou hodnotou (konstantou). Pro matematické modelování ve financích je typická tato interakce náhodných a známých veličin.

Vzájemnému působení náhodnosti a plynutí času se věnuje teorie stochastických procesů. Připomeňme, že posloupnost náhodných veličin X_t, $t \in I$, kde I je indexová množina, se nazývá stochastický proces.

Je-li X_t cena zvolené akcie v budoucím čase t, pak zřejmě X_t, X_{t+1} nejsou nezávislé náhodné veličiny. Hodnota X_t něco říká o pravděpodobnostním rozdělení náhodné veličiny X_{t+1}. Na druhé straně, přírustky $X_{t+2} - X_{t+1}$ a $X_{t+1} - X_t$ budou ve většině našich modelů nezávislé. To úzce souvisí s tzv. hypotézou efektivního trhu. Podle ní všechny informace dostupné v čase t jsou již obsaženy v ceně X_t. Jak uvidíme, je to také jedním z hlavních argumentů proč je geometrický Brownův pohyb “přirozeným ” modelem vývoje cen akcií.

1.2 Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je hlavním nástrojem modelování ve finanční matematice. Je dobré si uvědomit hned na začátku že pojem pravděpodobnost má více možných interpretací.

1. Frekventistický přístup: Pravděpodobnost jevu je limita jeho relativní četnosti při velkém počtu opakování téhož experimentu. Nevýhodou této definice je omezení na opakovatelné jevy. Předpoklad opakovatelnosti konkrétní situace na trhu není ve financích úplně reálný.

2. Bayesovský přístup: Pravděpodobnost vyjadřuje míru naší nejistoty o pravdivosti nějakého tvrzení, založenou na informacích, které v danou chvíli máme. V tomto pojetí je každá pravděpodobnost ve skutečnosti podmíněná (informacemi které právě máme). Například pravděpodobnost padnutí šestky na kostce je $P(X = 6) = \frac{1}{6}$, pokud nemáme žádnou informaci o tom jak je kostka vyrobena. Budeme-li znát například přesné složení materiálu (nehomogenost dřeva), může se tato pravděpodobnost změnit.

Matematická technika výpočtů nicméně na interpretaci ve většině případů nezávisí a je stejná pro obě pojetí.

1.3 Opakování základních pojmů teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor (model) obvykle označujeme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde

– Ω je prostor elementárních jevů, t.j. všech možných stavů modelovaného systému které chceme rozlišovat (např. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u hodu kostkou).

– $\mathcal{A}$ je množina všech pozorovatelných jevů. Prvky$\mathcal{A}$ jsou podmnožiny Ω. Jev je tedy formálně vzato množina elementárních jevů, které jsou s ním slučitelné. (Například jev padne sudé číslo je množina $\{2, 4, 6\}$)

Je-li Ω konečná nebo spočetná (tak tomu bude u všech diskrétních modelů), je $\mathcal{A}$ v definici pravděpodobnostního prostoru nadbytečné, neboť automaticky $\mathcal{A}$ je rovno $\exp \Omega$, množině všech podmnožin Ω.

– $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnostní míra. V diskrétním případě stačí znát hodnoty této míry na elementárních jevech, tedy $P : \Omega \to \langle 0, 1\rangle$. $P(\omega)$ je pak pravděpodobnost elementárního jevu ω, a pro obecný jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Pokud je ale Ω nespočetná, pak $\exp \Omega$ má příliš velkou mohutnost, aby se na ní dala definovat pravděpodobnostní míra. Musíme se pak omezit na menší σ-algebru. S tím se setkáme až u spojitých modelů.

1.4 Diskrétní náhodné proměnné

Diskrétní náhodná proměnná (náhodná veličina) je funkce

$$X : \Omega \to \{x_1, x_2, ...\} \subseteq \mathbb{R},$$

kde $\{x_1, x_2, ...\}$ je diskrétní podmnožina $\mathbb{R}$.

Definice 1.4.1. Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je definována jako

$$f(x) = P(X = x).$$

Definice 1.4.2. Distribuční funkce náhodné veličiny X je

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Připomeňme si ještě definici nezávislosti dvou jevů.

Definice 1.4.3. Jevy A, $B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, jestliže

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

tedy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Jinak řečeno (podle prvního vztahu), víme-li že nastal jev B, nezmění to pravděpodobnost jevu A.

Definice 1.4.4. Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou ***nezávislé***, jestliže jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ jsou nezávislé pro všechna x a y. Jinými slovy, znalost hodnoty X nedává žádnou informaci o hodnotě Y.

Pravděpodobnostní funkce obsahuje všechny informace o uvažované náhodné veličině. Často nám ale stačí její číselné charakteristiky.

Definice 1.4.5. ***Očekávání*** (střední hodnota) náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$ je definována jako

$$E(X) = \sum_{x:\, f(x)>0} x f(x),$$

je-li řada absolutně konvergentní.

Očekávání můžeme vypočítat také pomocí vztahu

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

Definice 1.4.6. Je-li k přirozené číslo, ***k-tý moment*** m_k náhodné veličiny X je definován jako

$$m_k = E(X^k).$$

Definice 1.4.7. ***k-tý centrální moment*** σ_k je definován jako

$$\sigma_k = E((X - m_1)^k).$$

Speciálně,

$$m_1 = E(X)$$

je střední hodnota a

$$\sigma_2 = E((X - E(X))^2)$$

je rozptyl (variance) Tedy $\sigma_2 = \sigma^2$, kde $\sigma = \sqrt{\sigma_2}$ je střední směrodatná odchylka.

Definice 1.4.8. Nechť A je jev, tj. $A \subseteq \Omega$, a nechť $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina definovaná vztahem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A \end{cases}.$$

Pak I_A se nazývá ***indikátorová funkce*** jevu A.

Libovolnou náhodnou veličinu můžeme zapsat pomocí indikátorových funkcí jevů $A_i = \{X = x_i\}$. Máme

$$X = \sum_i x_i I_{A_i}.$$

I_A je příkladem Bernoulliovské náhodné veličiny. Nabývá pouze hodnot 0 a 1.

1.5 Závislost a nezávislost náhodných veličin

Lemma 1.5.1. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Důkaz: Označme $A_x = \{X = x\}$ a $B_y = \{Y = y\}$. Pak

$$XY = \sum_{x,y} xyI_{A_x \cap B_y},$$

tedy

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyE(I_{A_x \cap B_y}) = \sum_{x,y} xyP(A_x \cap B_y) =$$

$$\sum_{x,y} xyP(A_x)P(B_y) = (\sum_x xP(A_x))(\sum_y yP(B_y)) = E(X)E(Y).$$

Opak obecně neplatí.

Definice 1.5.2. Říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou ***nekorelované***, jestliže platí:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Věta 1.5.3. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny. Pak*

1. $Var(aX) = a^2 Var(X)$ *pro* $a \in \mathbb{R}$.
2. *Jsou-li X a Y nekorelované (speciálně nezávislé) náhodné veličiny, pak*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Důkaz: První tvrzení plyne ihned z definice. Dokážeme druhé tvrzení.

$$Var(X + Y) = E\left([(X + Y) - E(X + Y)]^2\right) =$$

$$E\left[(X + Y)^2 - 2(X + Y)E(X + Y) + (E(X + Y))^2\right] =$$

$$E((X + Y)^2) - 2E(X + Y)E(X + Y) + E((X + Y)^2) =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - 2\left[(E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2\right]$$

$$+E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2$$

$$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 =$$
$$= \left(E(X^2) - (E(X))^2\right) + \left(E(Y^2) - (E(Y))^2\right) = Var(X) + Var(Y)$$

kde předposlední rovnost plyne z předpokladu, který implikuje $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Definice 1.5.4. ***Kovariance*** náhodných veličin X a Y je definována jako

$$cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right].$$

Korelační koeficient X a Y je

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Platí:

$$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow cov(X,Y) = 0$$

a

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Dále je

$$|\rho(X,Y)| \leq 1.$$

Klíčová otázka z praktického hlediska je jak ověřit nezávislost dvou daných náhodných veličin. Definice k tomu většinou vhodná není.

Definice 1.5.5. Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny (na stejném pravděpodobnostním prostoru). ***Sdružená distribuční funkce*** X a Y je definovaná vztahem

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y).$$

Definice 1.5.6. ***Sdružená pravděpodobnostní funkce***: $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ je definovaná vztahem

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y).$$

Analogicky se definuje sdružená pravděpodobnostní funkce pro více náhodných veličin. Následující lemma dává dobře ověřitelné kriterium nezávislosti.

Lemma 1.5.7. *Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy* *když*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Důkaz: cvičení.

Ze znalosti sdružené pravděpodobnostní funkce $f_{X,Y}$ můžeme vypočítat ***marginální pravděpodobnostní funkce*** f_X a f_Y. Máme

$$\begin{aligned} f_X(x) = P(X = x) &= P(\bigcup_y (\{X = x\} \cap \{Y = y\})) \\ &= \sum_y P(X = x \wedge Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x,y). \end{aligned}$$

Příklad 1.5.8. Nechť $X : \Omega \to \{1, 2, 3\}$a $Y : \Omega \to \{-1, 0, 2\}$ jsou náhodné veličiny, a sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

	$y = -1$	$y = 0$	$y = 2$	f_X
$x = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$
$x = 2$	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$
$x = 3$	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
f_Y	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{18}{18}$

Jsou X a Y nezávislé? Zřejmě ne, v tom případě by řádky tabulky musely být násobkem jeden druhého. Vypočteme kovarianci těchto dvou náhodných veličin. Máme

$$XY : \Omega \to \{-1, 0, -2, -3, 2, 4, 6\}.$$

Dále

$$E(X) = \frac{1}{18} + \frac{10}{18} + \frac{21}{18} = \frac{37}{18}, \quad E(Y) = \frac{13}{18}$$

a

$$E(XY) = -1\frac{1}{18} + 2\frac{2}{18} - 2\frac{2}{18} + 4\frac{3}{18} + 6\frac{3}{18} = \frac{29}{18}$$

Celkem tedy

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{29}{18} - \frac{481}{324} = \frac{522 - 481}{324} = \frac{41}{324}.$$

1.6 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněné očekávání

Připomeňme definici podmíněné pravděpodobnosti pro jevy,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ve finančních modelech je obvykle pravděpodobnost podmíněná informací, kterou máme v danou chvíli. Formálně to zachycuje následující definice.

Definice 1.6.1. Podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y za podmínky $X = x$, kterou budeme označovat $f_{Y|X}(. \mid x)$, je definována jako

$$f_{Y|X}(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x),$$

pro každé x takové, že $P(X = x) > 0$.

Z definice máme

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y \wedge X = x)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

tedy

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

což je analogický vztah jako platí pro podmíněné pravděpodobnosti jevů

V předchozím příkladu máme pro $x = 1$

$$f_{Y|X}(y \mid 1) \sim \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}\right) = \frac{f_{X,Y}}{f_X}.$$

Víme-li, že $X = x$, pak Y má novou pravděpodobnostní funkci $f_{Y|X}(y \mid x)$ jakožto funkci y (x je pevné).

Očekávání vůči této funkci je podmíněné očekávání Y za podmínky $X = x$, které označíme $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$.

Definice 1.6.2. Funkce (tj. náhodná veličina)

$$\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$$

se nazývá ***podmíněné očekávání*** Y při znalosti X.

V minulém příkladu je:

$$\Psi(1) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{3}{6}0 + \frac{2}{6}2 = \frac{1}{2},$$

$$\Psi(2) = \frac{-2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

a $\Psi(3) = \frac{6}{7}$.

Věta 1.6.3. *(O celkovém očekávání) Pro podmíněné očekávání* $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$ *platí*

$$E(\Psi(x)) = E(Y),$$

tedy

$$E(Y) = E(E(Y|X))$$

Důkaz: cvičení.

1.7 Součty náhodných veličin

Lemma 1.7.1. *Nechť* X *a* Y *jsou dvě náhodné veličiny na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $f(x, y)$ *je jejich sdružená pravděpodobnostní funkce. Pak pro jejich součet* $Z = X + Y$ *platí*

$$P(X + Y = z) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

Důkaz: Máme

$$\{X + Y = z\} = \bigcup_x (\{X = x \wedge Y = z - x\})$$

tedy

$$P(X + Y = z) = \sum_x P(\{X = x\} \wedge \{Y = z - x\}) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

Pokud X, Y jsou navíc nezávislé, pak

$$f_{X,Y}(x,\, z-x) = f_X(x) f_Y(z-x),$$

tedy

$$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x),$$

což je ***konvoluce funkcí*** f_X a f_Y. Označuje se $f_X \star f_Y$.

Kapitola 2

Náhodná procházka

2.1 Jednoduchá náhodná procházka

Jednoduchá náhodná procházka je základem diskrétních modelů pro pohyb cen aktiv. Je to "diskrétní verze" Brownova pohybu.

Uvažujme následující hru: Hází se opakovaně mincí (ne nutně férovou). Padne-li hlava (H), získáme 1 Kč. Padne-li orel (O), prohrajeme 1 Kč. Označme S_0 sumu, kterou máme na začátku a S_n sumu, kterou máme po n hrách.

Je tedy

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde X_i je náhodná veličina popisující výsledek i-té hry. Předpokládáme, že pravděpodobnostní funkce X_i je

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = 1 - p = q$$

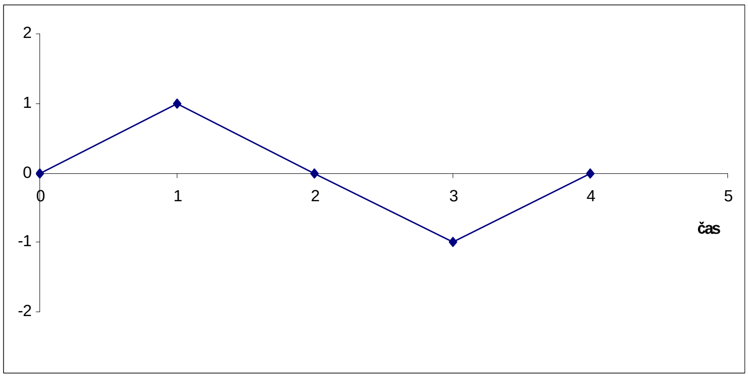
pro všechna i a navíc X_i jsou nezávislé.

X_i jsou tedy analogií Bernoulliho náhodné veličiny, kde místo hodnot $\{1, 0\}$ máme $\{1, -1\}$. Pro každé pevné n je S_n náhodná veličina, tedy $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stochastický proces.

Definice 2.1.1. Stochastický proces $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá ***jednoduchá náhodná procházka***. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, nazývá se ***symetrická*** jednoduchá náhodná procházka.

Někdy je vhodnější uvažovat jinou interpretaci – náhodný pohyb částice po přímce: V každém kroku $t = 0, 1, 2, ...$ se částice posune buď o 1 doprava s pravděpodobností p nebo o 1 doleva s pravděpodobností $q = 1 - p$.

Velmi užitečné je *grafické znázornění* jednoduché náhodné procházky. Body o souřadnicích $(n,\, S_n)$ spojíme úsečkami. Vzniklá lomená čára se nazývá ***trajektorie*** (cesta) náhodné procházky. Trajektorie je grafické znázornění realizace náhodného procesu $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$.



Varianty náhodné procházky:

- jiné rozdělení X_i (např. normální)
- hodnoty X_i ne v $\mathbb{R}$ ale v $\mathbb{R}^d$ (vícerozměrná náhodná procházka).

2.2 Základní vlastnosti náhodné procházky

Lemma 2.2.1. *Jednoduchá náhodná procházka je* ***prostorově homogenní****, tedy platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_n = j + b \mid S_0 = a + b).$$

Důkaz: Obě strany rovnosti jsou rovny

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a)$$

.

Podobně je náhodná procházka homogenní i v čase.

Lemma 2.2.2. *Jednoduchá náhodná procházka je **časově homogenní**, neboli platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_{n+m} = j \mid S_m = a).$$

Důkaz: Levá strana je rovna

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a),$$

pravá strana je rovna

$$P(\sum_{i=m}^{n+m} X_i = j - a).$$

Rovnost tedy plyne z nezávislosti a stejného rozdělení X_i.

Lemma 2.2.3. *Jednoduchá náhodná procházka má **Markovovu vlastnost**, tedy*

$$P(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, ..., S_m) = P(S_{m+n} = j \mid S_m).$$

Důkaz: Známe-li hodnotu S_m, pak rozdělení pravděpodobnosti S_{n+m} závisí jen na krocích X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_{m+n}, tedy je nezávislé na S_0, S_1, ..., S_{m-1}.

Markovovu vlastnost lze intuitivně popsat slovy: *"náhodná procházka nemá paměť, " "minulost ovlivňuje budoucnost jen skrze současnost"*

2.3 Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou

Tato sekce se věnuje základním technikám počítání s náhodnou procházkou:

- podmínění 1. krokem
- počítání trajektorií
- generující funkci

2.3.1 Technika podmínění 1. krokem

Příklad 2.3.1. (zruinování hráče): Uvažujme předchozí hru s férovou mincí ($p = \frac{1}{2}$). Padne-li hlava (H), hráč získá 1 Kč, padne-li orel (O), hráč prohraje 1 Kč. Nechť $S_0 = k$ je jeho počáteční jmění. Hráč si chce koupit auto v ceně N. Bude hrát tak dlouho, dokud $S_n = N$ (koupí auto) nebo $S_n = 0$ (bankrot). Jaká je pravděpodobnost, že si hráč koupí auto? Uvažujme jevy:

A ... hráč nakonec zbankrotuje;

H ... první hod je hlava ($P(\mathbf{H}) = p$);
O ... první hod je orel ($P(\mathbf{O}) = q$). Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí

$$P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

Označme $P_k(\mathbf{A})$ hledanou pravděpodobnost bankrotu pro dané počáteční jmění k, tedy

$$P_k(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H})$ je ale pravděpodobnost bankrotu v situaci, kdy hráč po 1. kroku má $k+1$ (a hra začíná z hlediska pravděpodobnosti znovu, z nezávislosti X_i). Tedy

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) = P_{k+1}(\mathbf{A})$$

a podobně

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}) = P_{k-1}(\mathbf{A}).$$

Označme $p_k = P_k(\mathbf{A})$. Dosazením dostaneme

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1} = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1},$$

což je diferenční rovnice 2. řádu. Máme

$$\frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k) = \frac{1}{2}(p_k - p_{k-1}),$$

tedy přírůstky pravděpodobnosti jsou konstantní. Označme přírůstky $b = p_k - p_{k-1}$, tedy $p_k = p_0 + kb$. Okrajové podmínky pro diferenční rovnici jsou:

$p_0 = 1$ (okamžitý bankrot)
$p_N = 0$ (okamžitá koupě auta)

Odtud dostaneme $1 + Nb = 0$, tedy $b = -\frac{1}{N}$ a

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

.

2.3.2 Technika počítání trajektorií

Uvažujme náhodnou procházku vycházející z bodu a. Máme tedy

$$S_0 = a, \quad P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q,$$

a

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pro pevně danou cestu je pravděpodobnost, že prvních n kroků bude sledovat právě tuto cestu, rovna $p^r q^l$, kde r je počet kroků doprava (nahoru) a l je počet kroků doleva (dolů), tedy

$$r = \mid \{i : S_{i+1} - S_i = 1,\, i \le n\} \mid,$$

kde $|\,.\,|$ značí velikost množiny.

Každý jev můžeme vyjádřit pomocí vhodné množiny trajektorií (které jsou s ním v souladu), a jeho pravděpodobnost je součet pravděpodobností těchto trajektorií. Máme

$$P(S_n = b) = \sum_r M_n^r(a,b) p^r q^{n-r},$$

kde $M_n^r(a,b)$ je počet cest $(S_0, S_1, ..., S_n)$ takových, že $S_0 = a$, $S_n = b$, a majících přesně r kroků doprava.

Víme, že $r + l = n$ a $r - l = b - a$. Odtud $2r = n + b - a$, čili

$$r = \frac{n+b-a}{2}$$

a

$$l = \frac{n-b+a}{2}.$$

Tedy

$$P(S_n = b) = \binom{n}{r} p^{\frac{n+b-a}{2}} q^{\frac{n-b+a}{2}} = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{n+b-a}{2}} q^{\frac{n-b+a}{2}},$$

pokud $\frac{1}{2}(n+b-a) \in \mathbb{N}$ (jinak je pravděpodobnost rovna 0).

2.3.3 Princip reflexe

Označme $N_n(a,b)$ počet všech cest z bodu $(0,a)$ do bodu (n,b). Víme, že

$$N_n(a,b) = M_n^r(a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}.$$

Dále nechť $N_n^0(a,b)$ je počet všech cest z bodu $(0,a)$ do bodu (n,b), které obsahují nějaký bod $(k,0)$ na ose x, tedy navštíví bod 0.

Věta 2.3.2. ***(princip reflexe)***: *Je-li a, $b>0$ pak platí*

$$N_n^0(a,b) = N_n(-a,b).$$

Důkaz: Každá cesta z bodu $(0,-a)$ do (n,b) protne osu x poprvé v nějakém bodě $(k,0)$. Reflexí této cesty okolo osy x dostaneme cestu z bodu $(0,a)$ do (n,b), která navštíví osu x. Tato operace dává vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi cestami z $(0,-a)$ do (n,b) a cestami $(0,a)$ do (n,b), které navštíví osu x. Tedy $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.

Věta 2.3.3. ***(o volbách)***: *Je-li $b>0$, pak počet cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n,b), které se nevrátí do bodu 0 je*

$$\frac{b}{n} N_n(0,b),$$

kde $N_n(0,b)$ je počet všech cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n,b).

Důkaz: Pro všechny takové cesty je první krok bod $(1,1)$ (jinak se nutně dostaneme do nuly), tedy jejich počet je roven (z časové homogenity):

$$\begin{aligned} N_{n-1}(1,b) - N_{n-1}^0(1,b) &= N_{n-1}(1,b) - N_{n-1}(-1,b) = \\ = \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1+b-1)} - \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+b)} &= \binom{n-1}{m-1} - \binom{n-1}{m} \\ &= \frac{b}{n}\binom{n}{m} = \frac{b}{n} N_n(0,b), \end{aligned}$$

kde jsme označili $m = \frac{1}{2}(n+b)$.

Příklad 2.3.4. (*Úloha o volbách*) Kandidát A má α hlasů; kandidát B dostal β hlasů, kde $\alpha > \beta$, tj. kandidát A zvítězil. Jaká je pravděpodobnost, že během voleb byl A celou dobu před B?

Označme $X_i = 1$ je-li i-tý hlas pro A, $X_i = -1$ je-li i-tý hlas pro kandidáta B. Je tedy $n = \alpha + \beta$. Součet

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

popisuje o kolik vede A nad B v čase k (případně prohrává je-li $S_k < 0$).

Podle věty o volbách je trajektorií z bodu $(0, 0)$ do bodu $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, které se nedostanou do 0 přesně

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} N_{\alpha+\beta}\left(0, \alpha - \beta\right).$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} N_{\alpha+\beta}\left(0, \alpha - \beta\right)}{N_{\alpha+\beta}\left(0, \alpha - \beta\right)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

Nyní se budeme zajímat o to, jaká je pravděpodobnost, že se náhodná procházka nevrátí do 0. Máme $S_0 = 0$ a chceme $S_1 \neq 0$, ..., $S_n \neq 0$, jinak řečeno $S_1 S_2 ... S_n \neq 0$.

Věta 2.3.5. *Je-li $S_0 = 0$, pak pro $n \geq 1$ platí*

$$P(S_1 S_2 ... S_n \neq 0 \mid S_n = b) = \frac{\mid b \mid}{n} P(S_n = b),$$

tedy

$$P(S_1 S_2 ... S_n \neq 0) = \frac{1}{n} E(|S_n|).$$

Důkaz: cvičení

2.3.4 Generující funkce

Uvažujeme posloupnost reálných čísel

$$a = \{a_i;\, i = 0,\, 1,\, 2,\, ..\}.$$

Taková posloupnost obsahuje velké množství informace, kterou můžeme výhodně "zakódovat" do jediného objektu (funkce), s nímž budeme moci lépe pracovat. Mimo jiné získáme možnost použít operace (např. derivaci) které pro posloupnosti nemají smysl.

Definice 2.3.6. ***Generující funkce posloupnosti*** a je funkce daná součtem mocninné řady

$$G_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

pro $s \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

Posloupnost a dostaneme z generující funkce G_a zpět vztahem

$$a_i = \frac{G_a^{(i)}(0)}{i!},$$

kde $G_a^{(i)}(0)$ je i-tá derivace G_a v bodě 0.

Příklad 2.3.7. Nechť $a = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, ...\}$. Pak

$$G_a = s - s^3 + s^5 - s^7 + \ ... \ ,$$

což je geometrická řada s prvním členem s a s kvocientem $q = -s^2$. Tedy

$$G_a(s) = \frac{s}{1 + s^2}$$

pro $\mid s \mid < 1$ (obor konvergence).

Dále budeme definovat generující funkci diskrétní náhodné veličiny.

Definice 2.3.8. Nechť X je diskrétní náhodná veličina, která nabývá hodnoty v množině $\{0, 1, 2, ...\}$, s pravděpodobnostní funkcí

$$f(i) = P(X = i).$$

Generující funkce této ***náhodné veličiny*** je definovaná jako generující funkce její pravděpodobnostní funkce, tedy

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) s^i.$$

Platí zřejmě

$$G_X(s) = E(s^X).$$

Základní vlastnosti generujících funkcí:

1. Existuje nezáporné číslo R (poloměr konvergence) takové, že $G(s)$ konverguje pro $\mid s \mid < R$ a diverguje pro $\mid s \mid > R$.

2. $G(s)$ můžeme derivovat nebo integrovat člen po členu, libovolně mnohokrát, pro $\mid s \mid < R$.

3. Jednoznačnost: Je-li $G_a(s) = G_b(s)$ pro $\mid s \mid < R'$, kde $0 < R' \leq R$, pak $a_n = b_n$ pro všechna n.

Příklady generujících funkcí náhodných veličin:

1. Konstantní náhodná veličina. $P(X = c) = 1$, kde $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Máme
$$G_X(s) = 1s^c = s^c.$$

2. Bernoulliho náhodná veličina. $P(X = 1) = p$ a $P(X = 0) = 1 - p$. Tedy
$$G_X(s) = ps^1 + (1-p)s^0 = 1 - p + ps.$$

3. Geometrické rozdělení. $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dostaneme
$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}s^n = \sum_{n=1}^{\infty} ps\left[(1-p)s\right]^{n-1} =$$
$$= ps\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-p)s\right]^n = \frac{sp}{1-(1-p)s} = \frac{sp}{1-s+sp}.$$

4. Poissonovo rozdělení s parametrem λ. $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Tedy
$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}s^i = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda s} = e^{\lambda s - \lambda} = e^{\lambda(s-1)},$$
s využitím $\sum_n \frac{x^n}{n!} = e^x$.

2.3.5 Charakteristiky náhodných veličin a jejich generující funkce

Základní charakteristiky náhodných veličin, $E(X)$ a $Var(X)$, lze jednoduše spočítat pomocí $G_X(s)$.

Věta 2.3.9. *Nechť X je náhodná veličina s generující funkcí $G(s)$. Pak platí:*

1. $E(X) = G'_X(1)$.

2. Obecně,

$$E(X(X-1)...(X-k+1)) = G^{(k)}(1)$$

(tzv. k-tý faktoriální moment).

Důkaz: První tvrzení je speciální případ druhého. Máme

$$G^{(k)}(s) = \sum_i s^{i-k} i(i-1)...(i-k+1)f(i) =$$

$$= E(s^{X-k} X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro $s \to 1_-$ dostaneme

$$G_X(1) = E(X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro rozptyl dostaneme speciálně vztah

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1) + X) - E(X)^2 =$$

$$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2.$$

2.3.6 Součty náhodných veličin a konvoluce

Něchť $a = \{a_i, \, i \geq 0\}$ a $b = \{b_i, \, i \geq 0\}$ jsou dvě posloupnosti, pak konvoluce $c = a \star b$ je posloupnost definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0.$$

Jsou-li G_a, G_b generující funkce posloupností a a b, pak generující funkce posloupnosti c je

$$G_c(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) s^n =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \right) \left(\sum_{n=i}^{\infty} b_{n-i} s^{n-i} \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \right) = G_a(s) G_b(s).$$

Tím jsme dokázali následující tvrzení.

Věta 2.3.10. *Generující funkce konvoluce dvou posloupností je součinem* *generujících funkcí těchto posloupností.*

Věta 2.3.11. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Důkaz: Víme, že pro pravděpodobnostní funkci $X+Y$ platí $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$ (z nezávislosti) a podle předchozí věty víme, že generující funkce konvoluce je součin generujících funkcí. Tedy

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Je-li $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, kde X_i jsou nezávislé, pak z předchozí věty plyne

$$G_S = G_{X_1} G_{X_2} ... G_{X_n}.$$

Definice 2.3.12. ***Sdružená pravděpodobnostní generující funkce náhodných veličin***, nabývajících hodnot v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je definovaná jako

$$G_{X_1,X_2}(s_1, s_2) = \sum P\left(X_1 = i \wedge X_2 = j\right) s_1^i s_2^J = E(s_1^{X_1} s_2^{X_2})$$

Analogicky je možné definovat sdruženou pravděpodobnostní generující funkci pro více náhodných veličin.

2.3.7 Generující funkce a náhodná procházka

Uvažujme opět náhodnou procházku

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde $P(X_i = 1) = p$ a $P(X_i = -1) = q = 1 - p$. Přitom X_i jsou nezávislé a $S_0 = 0$.

Jak často se náhodná procházka vrací do počátku? Jaké je pravděpodobnostní rozdělení prvního návratu do počátku? (Pro další návraty je to opět totéž, z nezávislosti X_i.) K zodpovězení těchto otázek využijeme generující funkce.

Označme

$$p_0(n) = P(S_n = 0)$$

pravděpodobnost, že náhodná procházka je v 0 v čase n a

$$f_0(n) = P(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0,\ ...,\ S_{n-1} \neq 0,\ S_n = 0)$$

pravděpodobnost, že první návrat do počátku nastal v čase n.

Uvažujme generující funkce těchto dvou posloupností,

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n$$

a

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) s^n.$$

Máme $p_0(0) = 1$ (neboť $S_0 = 0$) a $f_0(0) = 0$.

Lemma 2.3.13. *Platí*

$$P_0(s) = \left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Důkaz: Víme, že $S_n = 0 \Leftrightarrow$ počet kroků doprava = počet kroků doleva, tedy $r = \frac{n}{2} = l$. Počet takových cest je $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ pro n sudé a 0 pro n liché. Označme $k = \frac{n}{2}$, tj. $n = 2k$. Máme

$$p_0(2k) = \binom{2k}{k} p^k q^k$$

a

$$P_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pqs^2)^k. \tag{2.1}$$

Tvrdíme, že $P_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$. Využijeme obecného binomického rozvoje

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^a,$$

kde

$$\binom{a}{n} = \frac{a\,(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

Pro $a \in \mathbb{N}$ je rozvoj konečný, pro $a \in \mathbb{R} \wedge a \notin \mathbb{N}$ je rozvoj nekonečný. Dosazením $a = -\frac{1}{2}$ a $x = -4pqs^2$ dostaneme

$$\left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pqs^2\right)^k = \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4)^k \left(pqs^2\right)^k.$$

Porovnáním 2.1 a 2.2 tedy stačí dokázat, že

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4)^k = \binom{2k}{k}.$$

Pro levou stranu dostaneme

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} (-1)^k\, 2^{2k} =$$

$$2^k\,(-1)^{2k}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots(2k-1)}{k!} = 2^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!}.$$

Pro pravou stranu

$$\binom{2k}{k} = \frac{2k\,(2k-1)\,(2k-2)\ldots 1}{k!k!} = 2^k k! \frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{k!k!} =$$

$$2^k \frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{k!}.$$

Tedy obě strany se rovnají. Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.3.14. *Platí*

$$1)\ P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$$

a

$$2)\ F_0(s) = 1 - \left(1-4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz: Označme A jev, že $S_n = 0$ a nechť B_k jsou jevy první návrat do počátku nastal v k-tém kroku ($k = 1, 2, \ldots, n$).

1) B_k jsou disjunktní a dávají rozklad, tedy

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k).$$

Máme $P(B_k) = f_0(k)$ a $P(A \mid B_k) = p_0(n-k)$. Tedy

$$p_0(n) = \sum_{k=1}^{n} p_0(n-k) f_0(k).$$

Vynásobíme s^n a sečteme,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n)s^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} p_0(n-k)f_0(k)s^n =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_0(k)s^k\right)\left(\sum_{n=k}^{\infty} p_0(n-k)s^{n-k}\right) = P_0(s)F_0(s).$$

Protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n)s^n = P_0 - 1,$$

dostáváme $P_0 - 1 = P_0F_0$, tedy $P_0 = 1 + P_0F_0$.

Pro důkaz 2) dostáváme z 1)

$$F_0 = \frac{P_0 - 1}{P_0} = 1 - \frac{1}{P_0} = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}.$$

Důsledek 2.3.15. Pravděpodobnost toho, že se částice někdy vrátí do počátku je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \mid p - q \mid .$$

Speciálně, pro symetrickou náhodnou procházku ($p = q$) je návrat jistý.

Důsledek 2.3.16. (**Pólyova věta v dimenzi 1**) Symetrická náhodná procházka se s pravděpodobností 1 vrátí do počátku.

Důsledek 2.3.17. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, tedy návrat je jistý, pak očekávání času T_0 prvního návratu do počátku je

$$E(T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} nF_0(n) = F_0'(1) = \infty.$$

Důkaz:

1. Máme

$$F_0(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} =$$

$$= 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - \mid 1-2p \mid = 1 - \mid 1-p-p \mid = 1 - \mid q-p \mid .$$

   Pro $q = p = \frac{1}{2}$ je $F_0(1) = 1 - 0 = 1$.

2. Je-li návrat jistý, tedy $p = \frac{1}{2}$, pak $P(T_0 = \infty) = 0$, a tedy $E(T_0) = F_0'(1)$, kde $F_0 = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$. Máme

$$F_0' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}(-4pq2s) = \frac{4pqs}{\sqrt{1-4pqs^2}},$$

   tedy $\lim\limits_{s\to 1_-} F'(s) = +\infty$.

2.3.8 Časy navštívení bodu r

Označme

$$f_r(n) = P(S_1 \neq r,\, S_2 \neq r,\, ...,\, S_{n-1} \neq r,\, S_n = r)$$

pravděpodobnost, že se náhodná procházka dostane poprvé do bodu r v čase n, s generující funkcí

$$F_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_r(n) s^n.$$

Věta 2.3.18. *Platí*

1. $F_r(s) = [F_1(s)]^r$ *pro* $r \geq 1$,
2. $F_1(s) = \frac{1-\left(1-4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2qs}$.

Důkaz: Označme $T_r = min\,\{n;\, S_n = r\}$ počet kroků potřebných k dosažení hodnoty r poprvé. Nechť $r > 0$. Abychom dosáhli r, musíme se dostat nejdříve do bodu 1, a potom z bodu 1 do bodu r. To je z prostorové homogenity totéž jako dostat se z 0 do $r-1$. Odtud plyne $T_r = T_1 + T_{r-1}$. Z nezávislosti tedy dostaneme $F_r = F_1 F_{r-1}$. Máme

$$f_1(n) = P(S_1 \neq 1,\, S_2 \neq 1,\, ...,\, S_{n-1} \neq 1,\, S_n = 1) =: P(A) =$$

$$= P(A \mid S_1 = 1)P(S_1 = 1) + P(A \mid S_1 = -1)P(S_1 = -1) =$$

$$= P(A \mid S_1 = 1)p + P(A \mid S_1 = -1)q = 0p + f_2(n-1)q.$$

Odtud
$$f_1(n) = f_2(n-1)q.$$
Vynásobíme s^n
$$f_1(n)s^n = qf_2(n-1)s^n$$
a sečteme přes $n > 1$. Tedy
$$\sum_{n=2} f_1(n)s^n = \sum_{n=2} qf_2(n-1)s^n =$$
$$\sum_{n=2} sqf_2(n-1)s^{n-1} = sq\sum_{n=1} f_2(n)s^n.$$
Odtud dostáváme
$$F_1 - ps = F_2qs.$$
Víme, že $F_2 = F_1^2$, tedy
$$F_1 - ps = F_1^2qs$$
což vede ke kvadratické rovnici
$$qsF_1^2 - F_1 + ps = 0.$$
Řešením dostaneme dva kořeny
$$F_1 = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{4qps^2}}{2qs} \\ \frac{1+\sqrt{4qps^2}}{2qs} \end{cases}.$$
Kořen $\frac{1+\sqrt{4qps^2}}{2qs}$ ale nevyhovuje zadání, protože má v bodě 0 limitu ∞. Tím je tvrzení dokázáno.

Důsledek 2.3.19. Pravděpodobnost, že náhodná procházka někdy navštíví kladnou část reálné osy, je rovna $min\left\{1, \frac{p}{q}\right\}$.

Důkaz: Hledaná pravděpodobnost je rovna pravděpodobnosti že náhodná procházka navštíví bod 1. Ta je rovna
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n),$$
součtu pravděpodobností, že se dostaneme do bodu 1 v nějakém čase n. Víme, že
$$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)s^n.$$

Dosazením $s = 1$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) = F_1(1) = \frac{1 - (1 - 4pq)^{\frac{1}{2}}}{2q} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2(1-p)} =$$

$$\frac{1 - \sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)} = \frac{1 - \mid 1 - 2p \mid}{2(1-p)} = \frac{1 - \mid q - p \mid}{2q} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1-(-(q-p))}{2q} = \frac{1-p+q}{2q} = \frac{2q}{2q} = 1 & \text{pro}\, q < p \\ \frac{1-q+p}{2q} = \frac{2p}{2q} = \frac{p}{q} & \text{pro}\, q > p \end{cases}.$$

Příklad 2.3.20. Ruleta má 37 čísel (včetně 0). Budeme sázet stále na lichá čísla, tedy $p = \frac{18}{37}$ a $q = \frac{19}{37}$. Pravděpodobnost, že budeme někdy vyhrávat je $\frac{p}{q} = \frac{18}{19}$.

Kapitola 3

Zákony arcsinu a Pólyova věta

3.1 Zákony arcsinu pro symetrickou náhodnou procházku

V této podkapitole uvedeme dva zákony arcsinu, pro časy pobytu napravo od počátku (tj. v kladných hodnotách) a pro poslední navštívení počátku.

3.1.1 1. zákon arcsinu

Věta 3.1.1. ***(1. zákon arcsinu pro poslední návštěvu počátku)*** *Uvažujme symetrickou náhodnou procházku, t.j. $p = \frac{1}{2}$, a nechť $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$, je rovna*

$$P(S_{2k} = 0)\, P(S_{2n-2k} = 0)\,.$$

Důkaz: Označme $\alpha_{2n}(2k)$ pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$. Máme

$$\alpha_{2n}(2k) = P(S_{2k} = 0)\, P(S_{2k+1} S_{2k+2} ... S_{2n} \neq 0 \mid S_{2k} = 0)\,.$$

Z časové homogenity plyne

$$\alpha_{2n}(2k) = P(S_{2k} = 0)\, P(S_1 S_2 ... S_{2n-2k} \neq 0 \mid S_0 = 0)\,.$$

Tvrzení tedy plyne z následujícího lemmatu.

Lemma 3.1.2. *Pro symetrickou náhodnou procházku platí:*

$$P(S_1 ... S_{2m} \neq 0) = P(S_{2m} = 0),$$

kde $P(S_{2m}=0)=\binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

Důkaz: Využijeme důsledek věty o volbách: Je-li $S_0=0$, pak pro $n\geq 1$ platí

$$P\left(S_1 S_2 ... S_n \neq 0\right)=\frac{1}{n} E\left(\mid S_n \mid\right).$$

Dále ze symetrie plyne

$$P(S_1...S_{2m}\neq 0)=\frac{1}{2m}E(\mid S_{2m}\mid)=2\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m}2kP(S_{2m}=2k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{2m}P(S_{2m}=2k)=2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}=$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+k-1}-\binom{2m-1}{m+k}\right].$$

neboť platí

$$\binom{2m-1}{m+k-1}-\binom{2m-1}{m+k}=\frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}.$$

Opravdu, máme

$$\frac{(2m-1)\,...\,(m-k+1)}{(m+k-1)!}-\frac{(2m-1)\,...\,(m-k)}{(m+k)!}=$$

$$=\frac{(m+k)\,(2m-1)\,...\,(m-k+1)-(2m-1)\,...\,(m-k+1)\,(m-k)}{(m+k)!}$$

$$=\frac{(2m-1)\,...\,(m-k+1)\,[(m+k)-(m-k)]}{(m+k)!}=\frac{2k}{2m}\frac{2m\,(2m-1)\,...\,(m-k+1)}{(m+k)!}=$$

$$=\frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}.$$

V posledním členu výraz se sumou je tzv. teleskopický součet. Z takovéhoto součtu nám zůstane jen první a poslední člen, ostatní se vyruší. Odtud plyne, že

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+k-1}-\binom{2m-1}{m+k}\right]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\left[\binom{2m-1}{m}-\binom{2m-1}{2m}\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\binom{2m-1}{m}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{(2m-1)\,...m2}{m!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \frac{2m\,(2m-1)\ldots(m+1)}{m!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \binom{2m}{m} = P\left(S_{2m} = 0\right),$$

a odtud plyne tvrzení věty.

V následující podkapitole uvidíme proč se těmto tvrzením říká zákon arcsinu.

3.1.2 Stirlingova formule

Chceme porovnat hodnotu $n!$ (která se v různých formách vyskytuje v kombinačních číslech pro počty trajektorií) s mocninnými funkcemi. Víme, že $n^n \gg n\,(n-1)\ldots 21 \gg 2^n$, tedy $n^n \gg n! \gg 2^n$.

Jak rychle jde ale posloupnost $a_n = \frac{n!}{n^n}$ k nule? Lze ji srovnat s geometrickou posloupností? Pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Tedy (zatím jen hodně přibližně) můžeme psát

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{1}{e^n},$$

neboli $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$. **Stirlingova formule** dává přesnější odhad. Platí

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

v tom smyslu, že

$$lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Ze Stirlingovy formule dostaneme odhad na hodnotu $u_{2k} = P\left(S_{2k} = 0\right)$.

Lemma 3.1.3. *Platí $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ pro $k \to \infty$, tedy*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{2k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi k}}} = 1.$$

Důkaz: Máme

$$u_{2k} = P\left(S_{2k} = 0\right) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \approx$$

$$\frac{\frac{(2k)^{2k}}{e^{2k}}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(\frac{k^k}{e^k}\sqrt{2\pi k}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{2^{2k}k^{2k}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(k^k\sqrt{2\pi k}\right)^2}\left(\frac{1}{2^{2k}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Tím je lemma dokázáno.

Podle zákonu arcsinu je

$$\alpha_{2n}(2k) = u_{2k}u_{2n-2k},$$

tedy

$$P\left(S_{2k} = 0 \,\wedge\, S_{2k+1}...S_{2n} \neq 0\right) = P\left(S_{2k} = 0\right) P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

Ze Stirlingova vzorce máme

$$\alpha_{2n}(2k) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{1}{\sqrt{\pi\,(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}}.$$

Hodnota $\sqrt{k\,(n-k)}$ je maximální pro $k = \frac{n}{2}$, tedy $\alpha_{2n}(2k)$ je minimální pro $k = \frac{n}{2}$.

Označme T_{2n} čas posledního navštívení bodu 0 do času $2n$. Pak pro $x \in (0,\,1)$ máme

$$P\left(T_{2n} \leq 2xn\right) = \sum_{k \leq xn} \frac{1}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}} \doteq$$

$$\int_0^{xn} \frac{1}{\pi\sqrt{u\,(n-u)}}du = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}},$$

neboť

$$\left(2\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}}\right)' = 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{n}}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n}n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-x)x}{n^2}n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-x)\,x}}.$$

3.1.3 2. zákon arcsinu

2. zákon arcsinu se týká časů pobytu na jedné straně od počátku (tj. doby, kdy jeden z hráčů byl ve vedení).

Věta 3.1.4. *Nechť $p = \frac{1}{2}$ a $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že náhodná procházka stráví přesně $2k$ časových intervalů napravo od počátku je (opět) rovna*

$$P\left(S_{2k} = 0\right) P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

Důkaz: učebnice Grimmett, Stirzaker.

3.2 Pólyova věta v $\mathbb{R}^n$

Definice 3.2.1. Mějme posloupnost náhodných vektorů X_1, X_2, ..., $X_{n,\ldots}$, kde

$$X_i = \left(X_i^{(1)},\, X_i^{(2)},\, ...,\, X_i^{(m)}\right)$$

je m-rozměrný vektor. Nechť platí

$$P\left(X_i^{(j)} = 1\right) = \frac{1}{2}$$

a

$$P\left(X_i^{(j)} = -1\right) = \frac{1}{2}$$

pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro všechna $j \in \{1,\, 2,\, ...,\, m\}$, a všechna $X_i^{(j)}$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny.

m-***rozměrná náhodná procházka*** je definována vztahem

$$S_n^{(j)} = S_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)},$$

tedy vektorově

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pro $m = 2$ uvažujme množinu mřížových bodů

$$\mathbb{Z}^2 = \{(i,\, j) \mid i,\, j \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nechť $S_0 = (0,\, 0)$, pak

$$P\left[S_1 = [1, 1]\right] = P\left[S_1 = [-1, -1]\right] =$$

$$= P\left[S_1 = [-1,1]\right] = P\left[S_1 = [1,-1]\right] = \frac{1}{4}$$

Věta 3.2.2. ***(Pólyova věta)****: Pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí nekonečněkrát zpět do počátku je rovna 1 pro $m = 1$ a $m = 2$ a je rovna 0 pro $m > 2$.*

Poznamenejme, že pro $m = 3$ je pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku $\doteq 0,35$.

Důkaz: Jako u jednorozměrné procházky označme

$$p_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0\right)$$

pravděpodobnost návratu v čase n, a

$$f_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0 \,\wedge\, S_1 S_2 ... S_{n-1} \neq 0\right)$$

pravděpodobnost prvního návratu v čase n. Nechť P_0 a F_0 jsou generující funkce těchto posloupností. Víme, že platí

$$F_0 = 1 - \frac{1}{P_0}.$$

Máme

$$P\left(\text{částice se někdy vrátí do počátku}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_0\left(n\right) = F_0\left(1\right) = 1 - \frac{1}{P_0\left(1\right)},$$

kde ale

$$P_0\left(1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right).$$

Odtud dostáváme, že

$$P\left(\text{částice se někdy vrátí do počátku}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right) \text{ diverguje} \\ < 1 & \text{pokud } \sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right) \text{ konverguje} \end{cases}$$

Podle Stirlingovy formule víme, že $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$. Pro $m = 1$ je z nezávislosti komponent

$$p_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Víme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konverguje pro $s > 1$ (z integrálního kriteria). Pro $m > 1$ je

$$P\left(S_n = 0\right) = P\left(S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = ... = S_n^{(m)} = 0\right) = \left(P\left(S_n^{(1)} = 0\right)\right)^m,$$

tedy

$$p_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0\right) \approx \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Dále

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}$$

konverguje pro $\frac{m}{2} > 1$, tj. $m > 2$. Tedy pro $m > 2$ je hledaná pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku menší než 1, pro $m = 1$ a $m = 2$ je tato pravděpodobnost 1. Pravděpodobnost nekonečně monoha návratů je tedy rovna 0 pro $m > 2$ a rovna 1 pro $m \leq 2$.

Kapitola 4

Poissonův proces

4.1 Základní vlastnosti Poissonova procesu

Definice 4.1.1. *Poissonův proces* s intenzitou λ je proces $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ nabývající hodnoty v $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ takový, že

1. $N(0) = 0$ a pro $s < t$ je $N(s) < N(t)$.
2. $$\mathrm{P}(N(t+h) = n+m | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{pro } m = 1 \\ o(h) & \text{pro } m > 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{pro } m = 0 \end{cases}.$$
3. Je-li $s < t$, pak počet $N(t) - N(s)$ událostí v intervalech $[s, t]$ je nezávislý na $N(s)$, t.j. počtu událostí v $[0, s]$.

$N(t) \dots$ počet příchodů, událostí, emisí do času t.
N je tzv. čítací proces. Je také příkladem Markovovského řetězce ve spojitém čase.

Zajímá nás rozložení $N(t)$.

Věta 4.1.2. *$N(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tedy*

$$\mathrm{P}(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

Důkaz. Podmíníme $N(t+h)$ hodnotou $N(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t+h)=j) &= \sum_i \mathrm{P}(N(t)=i)\,\mathrm{P}(N(t+h)=j|N(t)=i) \\
&= \sum_i \mathrm{P}(N(t)=i)\,\mathrm{P}((j-i) \text{ příchodů v čase } (t,t+h))
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{P}(N(t)=j-1)\,\mathrm{P}(1 \text{ příchod}) + \mathrm{P}(N(t)=j)\,\mathrm{P}(\text{žádný příchod}) + o(h).$$

Tedy $p_j(t) = \mathrm{P}(N(t)=j)$ splňuje

$$\begin{aligned}
p_j(t+h) &= \lambda h p_{j-1}(t) + (1-\lambda h)\cdot p_j(t) + o(h) \qquad \text{pro } j \neq 0 \\
p_0(t+h) &= (1-\lambda h)\cdot p_0(t) + o(h).
\end{aligned}$$

V první rovnici odečteme $p_j(t)$, vydělíme h a necháme $h \to 0$. Pak

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t) \text{ pro } j \neq 0 \tag{4.1}$$

a podobně z 2.rovnice

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t).$$

Okrajové podmínky jsou

$$p_j(0) = \delta_{j0} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0 \\ 0 & \text{pro } j \neq 0. \end{cases}$$

To je systém diferenčně-diferenciálních rovnic pro $p_j(t)$.
Řešení najdeme pomocí generujících funkcí (v proměnné s a s parametrem t).
Definujeme

$$G(s,t) = \sum_0^\infty p_j(t)s^j = E(s^{N(t)}).$$

Rovnici 4.1 vynásobíme s^j a sečteme přes j. Dostaneme

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda(s-1)G$$

s okrajovou podmínkou $G(s,0) = 1$. Řešení je zřejmě

$$G(s,t) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)t} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} s^j$$

□

Uvedeme si ještě důležitou alternativní definici.

Definice 4.1.3. Nechť $T_0, T_1, \dots$ jsou dány vztahem

$$T_0 = 0,\ T_n = \inf\{t : N(t) = n\}.$$

Pak T_n se nazývá čas n-tého příchodu.

Definice 4.1.4. Definujeme časy mezi příchody (*Inter-arrival times*) jako náhodné veličiny

$$X_n = T_n - T_{n-1}.$$

Ze znalosti $N(t)$ umíme najít hodnoty X_n. Naopak z X_n lze zrekonstruovat $N(t)$ pomocí

$$T_n = \sum_1^n X_i; \quad N(t) = \max\{n; T_n \le t\}.$$

Věta 4.1.5. *Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé a mají exponenciální rozdělení s parametrem λ.*

Připomenutí: Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže její distribuční funkce je

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad x \ge 0 \tag{4.2}$$

Uvažujme Bernoulliho pokusy v časech $\delta, 2\delta, 3\delta, \dots$ a nechť W je čas čekání na 1.úspěch. Pak

$$\mathrm{P}(W > k\delta) = (1-p)^k \quad \text{a} \quad \mathrm{E}W = \frac{\delta}{p}.$$

Zvolme t pevně. Do času t jsme udělali přibližně $k = \frac{t}{\delta}$ pokusů. Nechť $\delta \to 0$. Abychom dostali netriviální limitu, musí také $p \to 0$. Nechť $\frac{p}{\delta} \to \lambda$. Pak

$$\mathrm{P}(W > t) = \mathrm{P}\left(W > \left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \delta\right) \cong (1-\lambda\delta)^{\frac{t}{\delta}} \to \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Důkaz. Nejdřív uvažujeme X_1:

$$\mathrm{P}(X_1 > t) = \mathrm{P}(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Dále podmíníme X_2 hodnotou X_1,

$$\mathrm{P}(X_2 > t | X_1 = t_1) = \mathrm{P}(\text{žádný příchod v } [t_1, t_1 + t] | X_1 = t_1).$$

Událost $\{X_1 = t_1\}$ se vztahuje k intervalu $[0, t_1]$, zatímco událost "žádný příchod v $[t_1, t_1+t]$" k času $> t_1$. Z definice Poissonova procesu jsou nezávislé, tedy

$$\mathrm{P}(X_2 > t | X_1 = t_1) = \mathrm{P}(\text{žádný příchod v } [t_1, t_1 + t]) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Tedy X_2 je nezávislá na X_1 a má stejné rozdělení. Tvrzení dále plyne analogicky, indukcí přes n. □

4.2 Cramér - Lundbergův model

Cramér - Lundbergův model je základním modelem v matematické teorii neživotního pojištění.

Předpoklady Cramér - Lundbergova modelu:

1. Pojistné nároky nastávají v časech $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$, což jsou časy příchodu homogenního Poissonova procesu $N(t)$
2. Pojistný nárok přicházející v i-tém čase T_i má velikost X_i. Posloupnost X_i tvoří nezávislé stejně rozdělené nezáporné náhodné veličiny
3. Posloupnosti T_i a X_i jsou navzájem nezávislé. Tedy i $N(t)$ a X_i jsou nezávislé.

Definice 4.2.1. Proces

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

který popisuje celkový pojistný nárok do času t se nazývá *složený Poissonův proces*

4.3 Inspekční paradox

Uvažujme homogenní Poissonův proces s intenzitou λ a předpokládejme, že se právě nacházíme v pevně danném čase t. Přirozená otázka je jaké má rozdělení doba od posledního příchodu, a naopak doba do nejbližšího následujícího příchodu.

Označme

$$B(t) = t - T_{N(t)}$$

čas od posledního příchodu a

$$F(t) = T_{N(t)+1} - t$$

čas do následujícího příchodu.

Zajímá nás sdružené rozdělení náhodných veličin $B(t)$ a $F(t)$. Speciálně, co můžeme na základě znalosti $B(t)$ řici o $F(t)$?

Intuitivně by se mohlo zdát, že čím delší je $B(t)$, tím kratší by mělo být čekání na další příchod. Přesto výpočet sdruženého rozdělení ukazuje že $B(t)$ a $F(t)$ jsou nezávislé. Tento výsledek se obvykle nazývá *inspekční paradox*.

Kapitola 5

Diskrétní modely ve finanční matematice

V této kapitole se budeme věnovat 1-krokovým a vícekrokovým diskrétním modelům finančního trhu. Jak uvidíme, vícekrokový (binomický) model je založen na jednoduché náhodné procházce.

5.1 1-krokový model

Uvažujeme jednu pevně zvolenou akcii, a předpokládejme, že – v čase $t = 0$ je cena akcie S_0 známá hodnota, – v čase $t = 1$ je cena akcie S_1 náhodná veličina (neznámá hodnota). Hodnota $S_1(\omega)$ je funkcí tržního scénáře $\omega \in \Omega$, kde

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$$

je prostor tržních scénářů

Dále předpokládejme, že existuje bezrizikové aktivum, jehož hodnota v čase $t = 0$ je rovna 1 a v čase $t = 1$ je rovna e^r za všech tržních scénářů. Hodnota r se nazývá bezriziková úroková míra. Předpokládáme, že úroková míra je stejná jak pro půjčování, tak pro ukládání peněz.

Příklad 5.1.1. ***Forwardová smlouva*** (uzavřená v čase $t = 0$) je následující závazný kontrakt: V čase $t = 1$ koupí X od Y jednu akcii za cenu F. Za uzavření smlouvy se neplatí. Jaká je "správná" cena F? **Věta 5.1.2.**

Jestliže neexistuje arbitráž, pak jediná možná cena ve forwardové smlouvě je

$$F = S_0 e^r.$$

Arbitráží je míněna možnost jak si bez rizika zajistit zisk "z ničeho". Přesnou definici si uvedeme za chvilku.

Důkaz: Dokážeme, že jak $F > S_0e^r$, tak $F < S_0e^r$ vede k arbitráži.

1) Nechť $F > S_0e^r$ (výhodné pro Y). Uvažujme následující strategii:

$t = 0 \ldots Y$ si vypůjčí v bance S_0, koupí akcii a uzavře forwardovou smlouvu na prodej akcie.

$t = 1 \ldots Y$ prodá akcii za F, do banky vrátí S_0e^r.

Zůstane mu bezrizikový zisk $F - S_0e^r > 0$, strategie tedy dává arbitráž.

2) Nechť $F < S_0e^r$ (výhodné pro X) Uvažujme teď tuto strategii:

$t = 0 \ldots X$ prodá akcii na krátko (tedy vypůjčí si akcii – tzv. short-selling) za S_0, uloží výnos do banky a uzavře forwardovou smlouvu na koupi akcie.

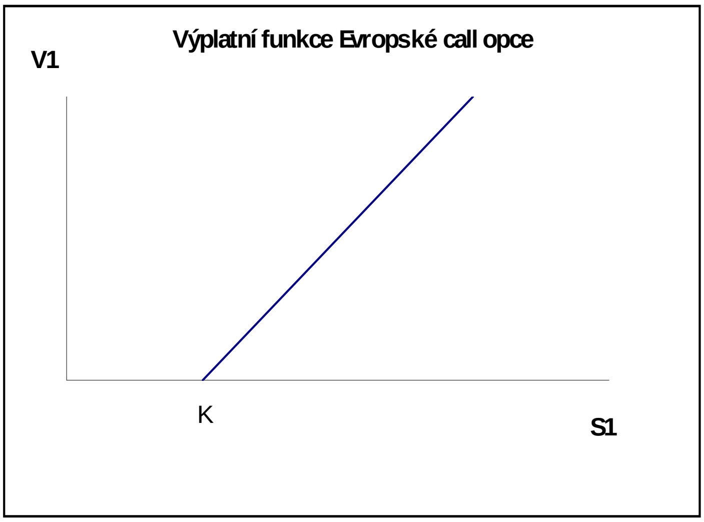
$t = 1 \ldots X$ dostane z banky S_0e^r, koupí akcii za F a vrátí ji (tj. uzavře krátkou pozici). Zůstane mu $S_0e^r - F > 0$, tj. bezrizikový zisk. Opět je to arbitráž.

Tedy pokud neexistuje arbitráž, pak $F = S_0e^r$.

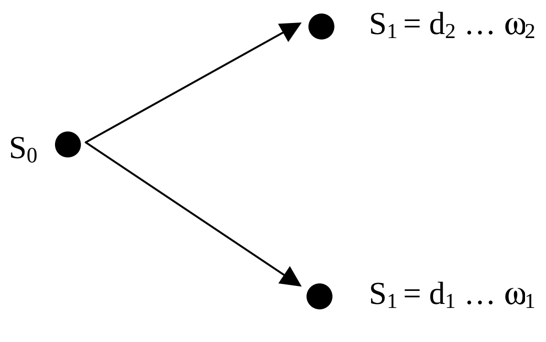
Příklad 5.1.3. ***Evropská call opce*** dává držiteli právo koupit akcii v čase $t = 1$ za cenu K (tzv. realizační cena opce). Kupec opce zaplatí v čase $t = 0$ za toto právo prodejci cenu V_0. Jaká je férová cena V_0?

V čase $t = 0$ neznáme S_1. Držitel opce ji v čase $t = 1$ uplatní, je-li $K < S_1$ (jinak koupí akcii levněji na trhu). Tedy hodnota v čase $t = 1$ je

$$V_1 = (S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K & \text{pokud}\, S_1 > K \\ 0 & \text{pokud}\, S_1 \leq K \end{cases}.$$



Jaká je hodnota V_0? Předpokládejme, že existují dva možné tržní scénáře (ω_1, ω_2) a nechť pro $t = 1$ máme $S_1(\omega_1) = d_1$ a $S_1(\omega_2) = d_2$.



Chceme určit V_0, za předpokladů

1. $d_1 < K < d_2$

2. $d_1 \leq S_0 e^r \leq d_2$

(pro $S_0 e^r < d_1 \leq d_2$ dostaneme arbitráž a stejně tak v opačném případě). Uvažujme portfolio $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, kde x_1 je počet aktiv peněžního trhu (bezrizikových), x_2 je počet akcií a x_3 počet opcí.

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře ω_1 je

$$y_1 = x_1 e^r + x_2 d_1 + 0 x_3$$

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře ω_2 je

$$y_2 = x_1 e^r + x_2 d_2 + (d_2 - K) x_3$$

Zobrazení $T : (x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které má nenulové jádro dimenze 1.

Tedy pro portfolio $(0, 0, 1)$ existuje jednoznačné portfolio $(x_1, x_2, 0)$, které má stejnou hodnotu jako $(0, 0, 1)$ v obou scénářích (tzv. replikující portfolio).

Hodnoty x_1 a x_2 najdeme řešením rovnic

$$x_1 e^r + x_2 d_1 = 0$$

pro $V_1(\omega_1)$ a

$$x_1 e^r + x_2 d_2 = d_2 - K$$

pro $V_1(\omega_2)$.

Řešením dostaneme:

$$x_1 = \frac{-d_1 e^{-r} (d_2 - K)}{d_2 - d_1}$$

a

$$x_2 = \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1}.$$

Portfolio $(x_1, x_2, 0)$ má stejnou hodnotu jako $(0, 0, 1)$ v každém scénáři. Musí mít tedy stejnou hodnotu i v čase $t = 0$ (jinak by existovala arbitráž).

Tedy

$$V_0 = -e^{-r} \frac{d_1(d_2 - K)}{d_2 - d_1} 1 + \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1} S_0 = (d_2 - K) \left(\frac{e^r S_0 - d_1}{d_2 - d_1} \right) e^{-r} + 0$$

$$= e^{-r} V_1(\omega_2) p + V_1(\omega_1)(1 - p),$$

kde $V_1(\omega_1) = 0$, e^{-r} je diskontní faktor a

$$p = \frac{e^r S_0 - d_1}{d_2 - d_1}$$

se nazývá "tržní" (risk-neutrální, rovnovážná) pravděpodobnost scénáře ω_2.

Tedy V_0 je diskontované očekávání hodnoty opce v čase $t = 1$ vzhledem k tržní pravděpodobnostní míře.

5.2 Základní věta APT

APT označuje arbitrážní teorii oceňování (Arbitrage Pricing Theory). Uvažujme trh s K aktivy A^1, ..., A^K volně obchodovatelnými, kde A^1 je bezrizikové aktivum. Cena podílu aktiva A^j v čase $t = 0$ je S_0^j (známá hodnota).

Dále máme tržní scénáře

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}.$$

Předpokládejme, že A^1 je bezrizikové, tj.

$$S_1^1(\omega_j) = e^r$$

pro všechna $j = 1, ..., N$, kde r je úroková míra.

$S_1^j(\omega_i)$ bude označovat hodnotu aktiva A^j v čase $t = 1$ za scénáře ω_i. Jsou to tedy náhodné veličiny, neboli funkce na prostoru tržních scénářů Ω.

Celkem dostáváme matici $N \times K$ s prvky $S_1^j(\omega_i)$.

Definice 5.2.1. ***Portfolio*** je vektor

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K) \in \mathbb{R}^K,$$

kde θ_j je počet podílů aktiva A^j v portfoliu. Pro $\theta_j < 0$ je majitel v krátké pozici v aktivu A^j (o velikosti $\mid \theta_j \mid$). V čase $t = 0$ je hodnota Θ rovna

$$V_0(\Theta) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j.$$

Pro $t = 1$ závisí hodnota Θ na ω_i,

$$V_1(\Theta, \omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i).$$

Definice 5.2.2. ***Arbitráž*** je portfolio, které "získává peníze z ničeho", tj. formálně buď

$$V_0(\Theta) \leq 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) > 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$, nebo

$$V_0(\Theta) < 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) \geq 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$.

Definice 5.2.3. Pravděpodobnostní míra $\pi_i = \pi(\omega_i)$ na množině Ω všech scénářů je ***rovnovážná pravděpodobnostní míra*** (neboli risk-neutrální míra), jestliže pro všechna A^j je hodnota podílu v čase $t = 0$ rovna diskontovanému očekávání vzhledem k pravděpodobnostní míře π hodnoty podílu v čase $t = 1$. Tedy

$$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 1, ..., K$, kde e^{-r} je diskontní faktor.

Věta 5.2.4. ***(Základní věta APT)****: Rovnovážná pravěpodobnostní míra existuje právě tehdy, když neexistuje arbitráž.*

Důkaz:

Implikace $\Leftarrow$ je snadná. Jestliže existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra π a Θ je portfolio, jehož hodnota v čase $t = 1$ je ≥ 0 za všech scénářů, pak

$$V_0(\Theta) = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) V_1(\Theta, \omega_i) \geq 0,$$

odkud plyne že Θ není arbitráž (a arbitráž tedy neexistuje).

Nyní chceme dokázat opačnou implikaci: Neexistuje-li arbitráž, pak existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra taková, že

$$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i).$$

Pro $j = 1$ platí tento vztah automaticky,

$$1 = S_0^1 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) e^r$$

$$= e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)S_1^1(\omega_i).$$

Uvažujme nyní $2 \leq j \leq K$. Označme ε množinu všech vektorů tvaru $y = (y_2, ..., y_K)$, kde

$$y_j = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 2, 3, ..., K$, pro nějakou pravděpodobnostní míru π.

$\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{K-1}$ je uzavřený konvexní polyedr. Je konvexním obalem svých extrémních bodů, které odpovídají pravděpodobnostem $\pi(\omega_i) = 1$, $\pi(\omega_j) = 0$ pro $j \neq 0$.

Chceme dokázat, že neexistuje-li arbitráž, pak

$$S = \left(S_0^2, ..., S_0^K\right) \in \varepsilon.$$

Jinak řečeno, pokud $S \notin \varepsilon$, pak existuje arbitráž. Využijeme větu o oddělující nadrovině.

Věta 5.2.5. *(Věta o oddělující nadrovině:) Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina a $x \notin F$. Pak existuje $v \in \mathbb{R}^n$ tak, že $v \cdot x < v \cdot y$ pro všechna $y \cdot F$, kde $\cdot$ je skalární součin.*

Důkaz: Nechť a je nejbližší bod v F k bodu x, pak vektor $a - x$ má hledané vlastnosti.

Podle této věty máme

$$S \in \varepsilon \Rightarrow \exists\Theta^\star = (\theta_2, ..., \theta_K) \neq 0$$

tak, že pro všechna $y \in \varepsilon$ platí:

$$y \cdot \Theta^\star > S \cdot \Theta^\star.$$

ε obsahuje extrémní body, tedy pro všechna i platí:

$$e^{-r}\sum_{j=2}^{K}\theta_j \cdot S_1^j(\omega_i) > \sum_{j=2}^{K}\theta_j \cdot S_0^j.$$

Levou stranu nerovnosti označme C_i, pravou stranu D. Ukážeme, že existuje arbitráž.

Zvolme θ_1 tak aby $C_i > \theta_1 > D$ pro všechna i. Pak portfolio $(-\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je arbitráž. Jeho hodnota v čase $t = 0$ je < 0 a hodnota v čase $t = 1$ je > 0 pro všechna ω_i.

Uvažujeme evropskou call opci, jejíž výplatní funkce je

$$V_1 = (S_1 - K)_+.$$

Dále $S_1(\omega_i) = d_i$ pro $i = 1, 2$ a $d_1 < d_2$. Pokud neexistuje arbitráž, pak existuje π taková, že cena akcie v $t = 0$ je diskontované očekávání

$$S_0 = e^{-r} \cdot (\pi(\omega_1) \cdot d_1 + \pi(\omega_2) \cdot d_2)\,,$$

a navíc víme, že $\pi(\omega_1) + \pi(\omega_2) = 1$. Speciálně tedy platí $d_1 < S_0 e^r < d_2$ (v předchozím to byl předpoklad, teď to platí automaticky).

Dostaneme

$$\pi(\omega_1) = \frac{d_2 - S_0 e^r}{d_2 - d_1}$$

a

$$\pi(\omega_2) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Je-li opce volně obchodovatelná, a má-li zůstat trh bez arbitráže, musí totéž platit i pro opci, tedy:

$$V_0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) + \pi(\omega_1)0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}(d_2 - K).$$

5.2.1 Jištění (Hedging)

Uvažujme aktiva A^1, A^2, ..., A^K, B. Nechť $S_t^j(\omega_i)$ a $S_t^B(\omega_i)$ jsou ceny A^j, resp. B, v čase t a scénáři ω_i, kde $t = 0, 1$.

Definice 5.2.6. Portfolio $\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je ***replikující portfolio*** pro B, jestliže

$$S_1^B(\omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $i = 1, ..., N$.

Věta 5.2.7. *Nechť $\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je replikující portfolio pro B. Neexistuje-li arbitráž, pak v čase $t = 0$ platí:*

$$S_0^B = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j.$$

Důkaz: Nechť tvrzení neplatí. Je-li $S_0^B > \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$, pak portfolio $(-1, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$

v aktivech B, A^1, A^2, ..., A^K je arbitráž, protože

$$\sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j - S_0^B < 0$$

a

$$S_1^B(\omega_i) - \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro všechna $\omega_i \in \Omega$.

Analogicky, pro

$$S_0^B < \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$$

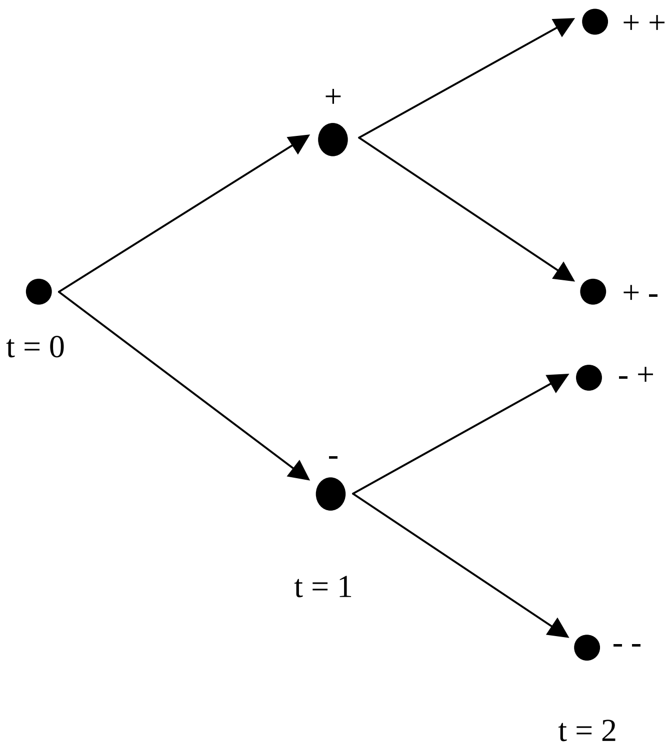
vezmeme opačné portfolio.

5.3 Model s více periodami

5.3.1 Trh se dvěma periodami

Uvažujme jedno bezrizikové aktivum a 1 rizikovou akcii. Tržní scénáře jsou nyní

$$\Omega = \{(++), (+-), (-+), (--)\}.$$



Předpokládejme, že

$S_1(+) = uS_0$

$S_1(-) = dS_0$

$S_2(++) = uS_1(+) = u^2S_0$

$S_2(+-) = dS_1(+) = udS_0$

$S_2(-+) = uS_1(-) = duS_0$

$S_2(--) = dS_1(-) = d^2S_0$

(u jako up a d jako down.) Máme tři částečné trhy. V každém uděláme stejný výpočet jako v jednokrokovém modelu. Dostaneme rovnovážné pravděpodobnosti (pro jednoduchost předpokládejme, že $r = 0$)

$$p_u = \frac{1-d}{u-d}$$

(S_0 se vykrátí) a

$$p_d = \frac{u-1}{u-d}.$$

Celkem rovnovážná pravděpodobnostní míra bude:

$$P(++) = p_u^2, \quad P(--) = p_d^2, \quad P(+-) = P(-+) = p_u p_d.$$

5.3.2 Vícekrokový model s T kroky

Množina všech možných scénářů je v tomto případě

$$\Omega = \{(+,+,+,...,+), (+,+,...,+,-), ..., (-,-,...,-)\}.$$

Má 2^T prvků, je tedy 2^T možných scénářů.

Pro scénář $\omega \in \Omega$ je jeho rovnovážná pravděpodobnost

$$P(\omega) = p_u^K p_d^{T-K},$$

kde K je počet $+$ ve scénáři ω.

Chceme-li ocenit opci, její cena bude diskontované očekávání její hodnoty v čase T

$$V_T = (S_T - K)_+$$

vůči rovnovážné pravděpodobnostní míře. Pro jednoduchost uvažujme $r = 0$. Nechť m je nejmenší přirozené číslo takové, že $S_0 u^m d^{T-m} \geq K$. Máme tedy

$$V_0 = \sum_{n=m}^{T} p_u^n p_d^{T-n} \binom{T}{n} \left(S_0 u^n d^{T-n} - K\right)$$

$$= \sum_{n=m}^{T} \frac{(1-d)^n (u-1)^{T-n}}{(u-d)^T} \binom{T}{n} \left(S_0 u^n d^{T-n} - K\right),$$

kde $\binom{T}{n}$ je počet trajektorií s celkem n plusy.

Poznámka. Položíme-li $d = \frac{1}{u}$, pak v limitě pro $T \to \infty$ a $u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{T}}}$ dostaneme Black-Scholesův spojitý model pro oceňování opcí. σ je parametr nazývaný volatilita.

Model který jsme uvažovali v této podkapitole se také často nazývá binomický. Jeho autory jsou Cox, Ross a Rubinstein.

Kapitola 6

Martingaly

6.1 Férová hra

Martingal je matematickým vyjádřením myšlenky "férové hry"

Implicitně jsme se s tímto pojmem již setkali, v kapitole o diskrétních modelech trhu.

Připomeňme, že v jednokrokovém modelu trhu se dvěma scénáři existuje rovnovážná pravděpodobnostní a platí

$$S_0 = e^{-r} E_P (S_1) = E \left(e^{-r} S_1 \right),$$

Tedy cena v čase $t = 0$ je diskontované očekávání vzhledem k pravděpodobnosti P ceny v čase $t = 1$.

Obecně, pro T-krokový model máme analogicky

$$S_0 = E_P \left(S_T e^{-rT} \right).$$

Navíc, pro libovolný čas $t \leq T$ platí

$$S_t = E_P \left(S_T e^{-r(T-t)} \mid S_0, S_1, \ldots, S_t \right),$$

tedy S_t je podmíněné očekávání diskontované hodnoty S_T, podmíněné informacemi o tržním scénáři, které máme v čase t.

Jak uvidíme za chvilku, tato vlastnost znamená, že diskontovaný proces S_t je martingal.

Připomeňme si ještě formální definici stochastického procesu.

Definice 6.1.1. Mějme měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a indexovou množinu $T \neq \emptyset$ (která hraje roli času). Dále mějme zobrazení X :

$\Omega \times T \to \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $t \in T$ je $X(\bullet, t)$ náhodná veličina (kterou značíme X_t). Pak takové zobrazení nazýváme ***stochastický proces*** definovaný na množině T. Značíme $\{X_t;\, t \in T\}$.

Stochastické procesy dělíme na 4 základní typy:

- diskrétní proces s diskrétním časem (např. náhodná procházka)
- diskrétní proces se spojitým časem (např. Poissonův proces)
- spojitý proces s diskrétním časem (např. Markovovy řetězce)
- spojitý proces se spojitým časem (např. Wienerův proces)

6.2 Přirozená filtrace

Definice 6.2.1. Ve vícekrokovém trhu se informace o tržním scénáři odhaduje krok po kroku. Pro $t \leq T$ definujeme

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechny jevy určené během prvních } t \text{ period}\}.$$

Zřejmě $\mathcal{F}_t$ je σ-algebra. Konečná posloupnost $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ se nazývá ***přirozená filtrace*** prostoru tržních scénářů Ω.

Obecně, systém σ-algeber $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ se nazývá ***filtrace***, jestliže platí

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$$

kdykoliv je $t \leq s$. To znamená, že s rostoucím časem neztrácíme informace, σ-algebra se s rostoucím časem nezmenšuje, typicky se naopak zvětšuje.

Příklad 6.2.2. 2-krokový model trhu. Množina tržních scénářů v tomto modelu je

$$\Omega = \{(++), (+-), (-+), (--)\}.$$

V čase $t = 0$ jsou určeny pouze jevy Ω a $\emptyset$, tedy

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

V čase $t = 1$ jsou určeny jevy: $F_+ = \{(++), (+-)\}$ a $F_- = \{(-+), (--)\}$. Tedy

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, F_+, F_-\}.$$

V čase $t = 2$ jsou určeny všechny jevy (každá podmnožina Ω), tedy

$$\mathcal{F}_2 = \exp \Omega = \{ \text{ všechny podmnožiny } \Omega \} .$$

Příklad 6.2.3. **T- krokový model.** Množina Ω_T tržních scénářů je množina posloupností délky T se složkami + nebo -. Celkem je takových scénářů 2^T.

Částečný scénář je posloupnost

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t)$$

délky $t \leq T$, kde $\xi_j = +$ nebo $\xi_j = -$ pro $j = 1, 2, ..., t$. Množinu těchto scénářů označme Ω_t.

Pro každý částečný scénář $\xi = (\xi_1, ..., \xi_t)$ definujeme jev $F(\xi)$ jako množinu všech úplných scénářů, jejichž prvních t složek jsou právě $\xi_1, ..., \xi_t$. Tedy

$$F(\xi) = \{\omega \in \Omega : \omega_j = \xi_j \text{ pro všechna } j = 1, 2, ..., t\} .$$

Úplné scénáře odpovídají koncovým uzlům stromu, částečné pak nekoncovým. σ-algebry $\mathcal{F}_t$ definujeme pak takto

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechna konečná sjednocení jevů } F(\xi) \text{, kde } \xi{=}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ \xi_t) \in \Omega_t\}$$

Cena akcie v čase t závisí na tržním scénáři, ale jen na jeho složkách do času t, nezávisí na složkách scénáře v časech $> t$. Tedy proces ceny je adaptovaný přirozené filtraci, ve smyslu následující definice.

Definice 6.2.4. Posloupnost náhodných veličin X_t je ***adaptovaná přirozené filtraci***, jestliže pro každé t a pro každý tržní scénář $\omega = \xi_1, ..., \xi_T$ hodnota $X_t(\omega)$ závisí jen na částečném scénáři $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t$.

6.3 Martingal

Definice 6.3.1. Nechť $\mathcal{F}$ je přirozená filtrace prostoru tržních scénářů $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ a P je pravděpodobnostní míra na Ω. Adaptovaná posloupnost náhodných veličin X_t se nazývá ***martingal***, jestliže platí

$$E(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = X_t$$

pro všechna $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$.

Pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \geq X_t$$

mluvíme o ***submartingalu***, pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \leq X_t$$

mluvíme o ***supermartingalu***.

$\mathcal{F}_t$ obsahuje veškeré informace dostupné v čase t. Často je tato informace obsažena v hodnotách X_1, X_2, ..., X_t. Pak máme

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(X_{t+1} \mid X_1, X_2, ..., X_t\right)$$

Příklad 6.3.2. (Symetrická jednoduchá náhodná procházka). Nechť $P\left(X_i = 1\right) = \frac{1}{2} = P\left(X_i = -1\right)$ a $S_n = X_1 + ... + X_n$. Pak S_n je martingal.

6.4 Samofinancující portfolia

6.4.1 Dynamické portfolio

Uvažujme T-krokový model trhu s aktivy A^1, A^2, ..., A^K. Označme $S_t^A\left(\omega\right)$ cenu podílu aktiva A v čase t ve scénáři ω a $\Theta_t^A\left(\omega\right)$ počet podílů aktiva A, které držíme v portfoliu Θ v čase t za scénáře ω.

Posloupnost Θ_t^A musí být adaptovaná přirozené filtraci. Dynamické portfolio je ***omezené***, jestliže náhodné veličiny Θ_t^A jsou všechny omezené.

6.4.2 Samofinancující portfolio

Hodnota portfolia Θ po rebalancování (upravení) v čase t za scénáře ω je

$$V_t^{\Theta} = V_t^{\Theta}\left(\omega\right) = \sum_A \Theta_t^A\left(\omega\right) S_t^A\left(\omega\right),$$

kde sčítáme přes všechna aktiva $A = A^1$, A^2, ..., A^K.

Hodnota V_{t+1}^{Θ} po proběhnutí obchodování v čase t bude obecně jiná, než V_t^{Θ}.

Pokud do portfolia nepřidáváme ani neodebíráme prostředky, musí být jeho hodnota těsně po rebalancování stejná jako před rebalancováním. Tedy platí

$$\sum \Theta_t^A S_{t+1}^A\left(\omega\right) = \sum \Theta_{t+1}^A S_{t+1}^A\left(\omega\right),$$

kde S_{t+1}^A jsou nové ceny a Θ_{t+1}^A jsou nové podíly v portfoliu.

Úpravou pak dostaneme

$$V_{t+1}^{\Theta}(\omega) - V_t^{\Theta}(\omega) = \sum_A \Theta_t^A \left(S_{t+1}^A(\omega) - S_t^A(\omega)\right).$$

To je *podmínka pro samofinancující portfolio.*

Věta 6.4.1. *Nechť v T-periodickém trhu M neexistuje arbitráž a nechť existuje bezrizikové aktivum s úrokovou mírou $r = 0$. Pak vzhledem k rovnovážné pravděpodobnostní míře je proces cen (S_t) libovolného obchodovatelného aktiva martingalem vzhledem k přirozené filtraci*

Definice 6.4.2. Nechť $\mathcal{F}_t$ je přirozená filtrace a Y_t je posloupnost náhodných veličin adaptovaných $\mathcal{F}_t$. Y_t se nazývá ***předvídatelná posloupnost***, jestliže pro všechna $t \geq 1$ je Y_t $\mathcal{F}_{t-1}$ - měřitelná. (tedy hodnota Y_t je určena již v čase $t-1$).

6.5 Martingalová transformace

Definice 6.5.1. Nechť posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ pro $0 \leq t \leq T$ je martingal a nechť $\{Y_t\}$ pro $0 \leq t \leq T$ je předvídatelná posloupnost. Pak ***martingalová transformace*** $\{(Y \bullet X)_t\}_{0\leq t\leq T}$ je posloupnost náhodných veličin definovaná jako

$$(Y \bullet X)_t = X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} Y_j (\Delta X)_{j+1},$$

kde $(\Delta X)_{t+1} = X_{t+1} - X_t$.

Věta 6.5.2. *Martingalová transformace je martingalem vzhledem k $\mathcal{F}_t$.*

Důkaz: Cvičení.

Důsledek 6.5.3. Nechť M je T-periodický trh bez arbitráže, obsahující bezrizikové aktivum s úrokovou mírou $r = 0$ a nechť M má rovnovážnou pravděpodobnostní míru P. Pak pro každé samofinancující portfolio je proces jeho ceny $\left(V_t^{\Theta}\right)_{0\leq t\leq T}$ martingalem.

Důkaz: Z podmínky pro samofinancující portfolio plyne, že proces ceny je martingalová transformace, a tedy martingal.

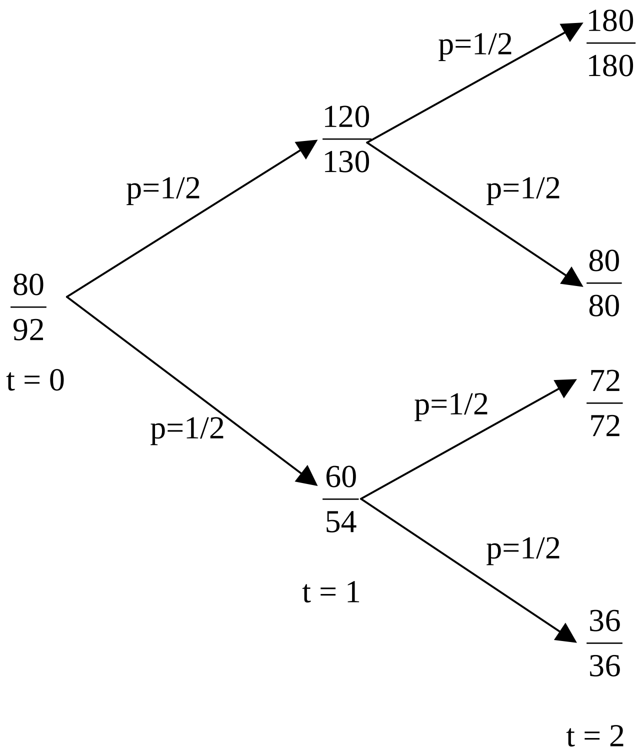
6.5.1 Podmíněná očekávání a martingalová transformace

Vlastnost martingalu znamená, že "očekávaná budoucí hodnota = současná hodnota". Následující obrázky mají ilustrovat graficky pojem martingalu. Do grafu zaneseme příslušné hodnoty a očekávání':

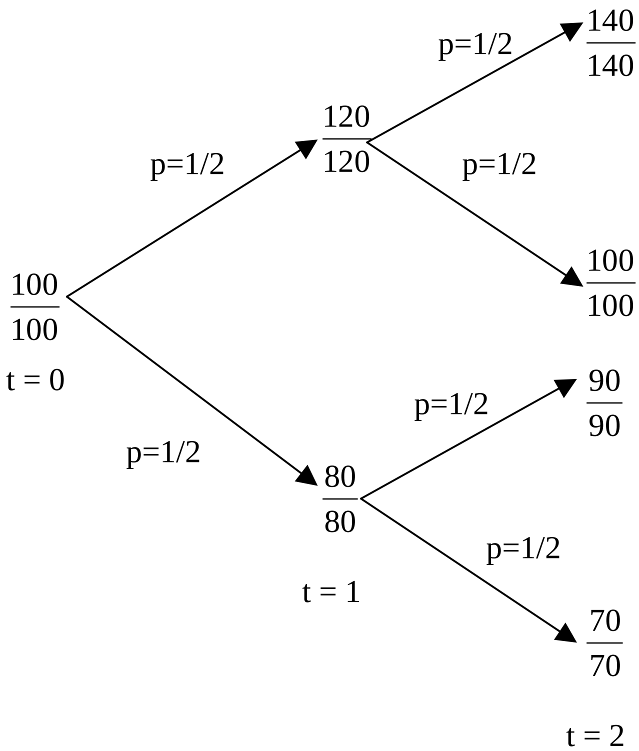
$t = 0 : \ \frac{S_0}{E(S_1|S_0)}$

$t = 1 : \ \frac{S_1}{E(S_2|S_1)}$

$t = 2 : \ \frac{S_2}{E(S_2|S_2)}$



Předchozí obrázek není martingal - u martingalu jsou nahoře i dole stejné hodnoty, viz následující obrázek:



Kapitola 7

Úplnost trhu

7.1 Věta o úplnosti trhu

Uvažujeme trh M s aktivy A^1, ..., A^k. Podle základní věty arbitrážní teorie (APT) plyne z neexistence arbitráže existence rovnovážné pravděpodobnostní míry (může jich být i více).

Definice 7.1.1. Trh bez arbitráže se nazývá ***úplný***, jestliže existuje právě jedna rovnovážná pravděpodobnostní míra. Trh je neúplný, pokud existuje více rovnovážných pravděpodobnostních měr.

Definice 7.1.2. ***Derivát*** je obchodovatelné aktivum, jehož hodnota V_1 v čase $t = 1$ je funkcí $V_1(\omega_i)$ tržního scénáře. Tedy V_1 je náhodná veličina na $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$.

Definice 7.1.3. ***Replikující portfolio*** pro daný derivát V, jehož hodnoty v čase $t = 1$ za scénáře ω_i jsou rovny $V_1(\omega_i)$ je portfolio $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ v aktivech A^1, ..., A^k takové, že:

$$V_1(\omega_i) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_1^j(\omega_i),$$

kde $S_1^j(\omega_i)$ je cena j-tého aktiva A^j za scénáře ω_i.

Z neexistence arbitráže plyne, že

$$V_0 = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_0^j,$$

tedy pokud existuje replikující portfolio, derivát má jednoznačně určenou cenu v čase $t = 0$.

Věta 7.1.4. *(**o úplnosti trhu**): Nechť M je trh bez arbitráže s bezrizikovým aktivem. Existuje-li pro každý derivát replikující portfolio v A^1, ..., A^k, pak je trh úplný. Naopak je-li M úplný a rovnovážná pravděpodobnostní míra dává kladnou pravděpodobnost každému scénáři (tj. $\pi(\omega_i) > 0$ pro $\forall i$), pak pro každý derivát existuje replikující portfolio (a tedy derivát má jednoznačně určenou cenu).*

Důkaz je založen na jednoduchých myšlenkách z lineární algebry. Deriváty tvoří vektorový prostor (izomorfní $\mathbb{R}^N$). Trh je úplný, právě tehdy když vektory hodnot aktiv A^1, A^2, ..., A^k v jednotlivých scénářích generují $\mathbb{R}^N$. Tedy vektory $S_1^j(\omega_i)$, $j = 1, ..., k$ generují $\mathbb{R}^N$. Speciálně platí $k \geq N$.

Důkaz: Chceme nejdříve dokázat, že pokud existuje replikujcí portfolio, pak M je úplný.

Uvažujme pro pevně zvolený scénář $\omega_l \in \Omega$ následující derivát D_l, jehož hodnota v čase $t = 1$ je rovna

$$V_1(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq l \\ 1 & \text{pro } i = l \end{cases}.$$

Podle předpokladu existuje replikující portfolio pro D_l, označme ho $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$, v aktivech A^1, ..., A^k. Tedy

$$V_0 = \sum \theta_j S_0^j.$$

Je-li π rovnovážná pravděpodobnostní míra, pak také

$$V_0 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} V_1(\omega_i) \pi_i = e^{-r} \pi(\omega_l).$$

Odtud plyne

$$\pi(\omega_l) = e^r \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_0^j$$

a tedy π je jednoznačně určena.

Zbývá nám dokázat opačnou implikaci. Označíme

$$\vec{a_j} = \left(S_1^j(\omega_1), S_1^j(\omega_2), ..., S_1^j(\omega_N)\right)$$

vektor v $\mathbb{R}^N$ pro každou hodnotu j (tedy každé aktivum A_j). Derivát je vektor v $\mathbb{R}^N$, který dá se replikovat právě tehdy, když vektor jeho hodnot v jednotlivých scénářích patří do lineárního obalu vektorů $\vec{a_j}$.

Nechť existuje $\pi(\omega_i)$ jednoznačně určená, taková, že $\pi(\omega_i) > 0$ pro všechna i. Budeme postupovat sporem: Nechť existuje derivát D, který nemá replikující portfolio. Tedy jsou-li jeho hodnoty ve scénářích ω_i rovny $f(\omega_i)$ a označíme-li

$$\vec{f} = (f(\omega_1), ..., f(\omega_N)),$$

pak $\vec{f}$ není lineární kombinací $\vec{a_j}$, a tedy $\vec{a_j}$ negeneruje $\mathbb{R}^N$. Existuje tedy vektor $\vec{v} = (v_1, ..., v_N)$, který je kolmý na vektory $\vec{a_j}$ pro všechna j, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{N} v_i S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro $j = 1, ..., k$. Aktivum A^1 je bezrizikové, tedy

$$A_1^1(\omega_i) = e^r$$

pro všechna i. Speciálně tedy $\vec{v} \perp (1, ..., 1)$ a

$$\sum_{i=1}^{N} v_i = 0.$$

Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ označme

$$\pi^*(\omega_i) = \pi(\omega_i) + \varepsilon v_i.$$

Máme

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^*(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) + \sum_{i=1}^{N} v_i = 1 + 0 = 1.$$

Navíc, je-li ε dostatečně malé, pak $\pi^*(\omega_i) > 0$, neboť $\pi(\omega_i) > 0$, a platí

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^*(\omega_i) S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} v_i S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i).$$

Tedy π^* je další rovnovážná pravděpodobnostní míra, což je spor. Tím je tvrzení dokázáno.

Kapitola 8

Wienerův proces (Brownův pohyb)

8.1 Limita náhodné procházky

Wienerův proces je stochastický proces ve spojitém čase se spojitými hodnotami, který můžeme intuitivně chápat jako limitu náhodné procházky při zmenšování časového a prostorového kroku Δx Δt (tedy pro $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$).

Nechť $P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$, kde X_i, ..., $X_n, ...$ jsou stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny s $E(X_i) = 0$ a $Var(X_i) = 1$. Potom

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

kde $S_0 = 0$ je standardní symetrická náhodná procházka.

Zvolme délku časového kroku Δt a velikost prostorového kroku Δx. Pro $t = n\Delta t$, tedy $n = \frac{t}{\Delta t}$, definujeme proces

$$S_t = S_{n\Delta t} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)\,\Delta x.$$

Z nezávislosti přírůstků X_j plyne, že $E(S_t) = 0$ a

$$Var(S_t) = (\Delta x)^2 n = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}.$$

Zajímá nás chování tohoto procesu v limitním přechodu $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$. Uvažujeme mocninnou závislost mezi Δx a Δt. Položme $\Delta t = (\Delta x)^p$, kde $p > 0$. Pro $\Delta t \to 0$ pak dostáváme

$$Var(S_t) = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t \begin{cases} \to 0 & \text{pro } p < 2 \\ = t & \text{pro } p = 2 \\ \to \infty & \text{pro } p > 2 \end{cases}.$$

Konečný nenulový rozptyl tedy dostaneme jen pro volbu $p = 2$. Pro

$$\Delta t = (\Delta x)^2$$

dostaneme v limitě pro $\Delta t \to 0$ standardní Wienerův proces.

Z Centrální limitní věty plyne, že S_t má v limitě pro $\Delta t \to 0$ a $(\Delta x)^2 = \Delta t$ normální rozdělení $N\left(0,\, t\right)$.

Věta 8.1.1. ***(Lindenbergova centrální limitní věta)*** *Nechť* X_1, X_2, ... *jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které mají střední hodnotu* μ *a konečný rozptyl* σ^2*. Označme*

$$Y_n = \frac{(X_1 + X_2 + ... + X_n - \mu n)}{\sqrt{n}}$$

pro $n = 1,\, 2,\, ...$ *Pak* Y_n *konverguje v distribuci k rozdělení* $N\left(0,\, \sigma^2\right)$.

Definice 8.1.2. Stochastický proces W_t, kde $t \in [0, \infty)$, se nazývá ***standardní Wienerův proces***, jestliže platí:

1. $W_0 = 0$

2. (*spojitost*) S pravděpodobností 1 je trajektorie Wienerova procesu spojitá.

3. (*nezávislost*) PřírůstkyWienerova procesu jsou nezávislé, tj. pro $0 \leq t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq ... \leq t_n < s_n$ jsou přírůstky $W_{s_1} - W_{t_1}$, $W_{s_2} - W_{t_2}$, ..., $W_{s_n} - W_{t_n}$ navzájem nezávislé.

4. (*normalita přírůstků*) Přírůstky $W_s - W_t$ pro $s > t$ mají rozdělení $N\left(0,\, s - t\right)$.

Speciálně z vlastností 1 a 4 máme

$$W_t \sim N\left(0,\, t\right) \sim \sqrt{t} N\left(0,\, 1\right).$$

Označme ΔW přírůstek Wienerova procesu za čas Δt. Máme

$$\Delta W = \sqrt{\Delta t} \varepsilon,$$

kde ε má standardní normální rozdělení $N\left(0,\, 1\right)$.

Pro očekávání a rozptyl ΔW dostaneme

$$E\left(\Delta W\right) = \sqrt{\Delta t} E\left(\varepsilon\right) = 0$$

a

$$Var\,(\Delta W) = E\left((\Delta W)^2\right) = \Delta t.$$

Zobecněný Wienerův proces můžeme definovat pomocí infinitezimálního přírůstku

$$dX = adt + bdW,$$

kde a, b jsou konstanty a W je standardní Wienerův proces. Koeficient a je ***koeficient driftu*** a b je ***koeficient volatility***. Opět máme

$$\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

tedy

$$E\,(\Delta X) = a\Delta t$$

a

$$Var\,(\Delta X) = b^2\Delta t.$$

Pro $b = 0$ máme

$$dX = adt,$$

tedy $X_t = at$ je deterministický proces.

Další možné zobecnění: koeficienty a, b se mohou měnit a mohou záviset na t a případně i na hodnotách X.

8.2 Wienerův proces pro cenu akcie

Wienerův proces není vhodný pro popis vývoje ceny akcie z několika důvodů:

- Ceny akcie mohou nabývat i záporné hodnoty.
- Při Wienerově procesu je pravděpodobnost, že se cena zvýší o 1 Kč stejná je-li $S = 1$ Kč, nebo $S = 100\,000$ Kč. To co je ve skutečnosti důležité není absolutní změna (ta závisí mimo jiné také na jednotkách v nichž cenu vyjadřujeme), ale relativní změna vůči ceně akcie.

Je-li volatilita nulová, máme

$$\Delta S = \mu S\Delta t.$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit relativní přírůstek

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t,$$

kde μ je konstanta (drift). Odtud dostáváme

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

a řešením diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$S_t = S_0 e^{\mu T}.$$

Obecně

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

kde μ je drift a σ je volatilita. Tak je definován ***geometrický Wienerův proces***. Máme

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

a diskretizací dostaneme:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

kde $\varepsilon \sim N\left(0,\, 1\right)$.

Tedy

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

odkud

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t,\, \sigma^2 \Delta t\right).$$

Jinak řečeno,

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu \Delta t$$

a

$$Var\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2 \Delta t.$$

K vyřešení rovnice, t.j. odvození explicitního vztahu pro S potřebujeme Itôovo lemma.

8.2.1 Itôovo lemma

Pro porovnání připomeňme nejdříve diferenciál deterministické funkce.

- 1 proměnná: $dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx$

- funkce 2 deterministických proměnných x, t:

$$\Delta \approx \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x,$$

neboli

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{\partial G}{\partial x}dx.$$

V případě Wienorova procesu platí heuristický vztah

$$(dW)^2 = dt$$

proto budeme mít navíc člen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dX)^2.$$

Itôovo lemma je analogií pravidla pro diferenciál složené funkce a slouží k výpočtu přírůstků funkce stochastického procesu.

Nechť hodnota stochastického procesu X splňuje rovnici

$$dX = a(X,\, t)\, dt + b(X,\, t)\, dW,$$

kde W je standardní Wienerův proces a a, b jsou funkce X a t. Nechť $G(x,\, t)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných x, t. Jakou rovnici splňuje přírůstek procesu $G(X,\, t)$?

Itôovo lemma říká, že pro G platí

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{\partial G}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dX)^2$$

kde za dX dosadíme a $(dX)^2$ počítáme podle pravidel

$$dtdt = 0, \quad dtdW = 0, (dW)^2 = dt.$$

Tak dostaneme celkem

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + a\frac{\partial G}{\partial x}\right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdW.$$

8.2.2 Odvození Black-Scholesovy rovnice

Black-Scholesova rovnice popisuje vývoj hodnoty evropské opce v Black-Scholesově modelu. Předpokládejme, že pohyb ceny akcie je popsán geometrickým Wienerovým procesem

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

neboli

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

Použijeme Itôovo lemma na funkci $G(S, t) = lnS$. Máme

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2}.$$

Tedy z Itôova lemmatu

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW$$

a

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW.$$

Odtud plyne, že $\ln S_T - \ln S_0$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$ a rozptylem $\sigma^2 T$. Tedy

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T;\, \sigma^2 T\right).$$

S_T má tedy ***lognormální rozdělení***, tj. $\ln S_T$ má normální rozdělení.

Máme rovnici pro cenu akcie, která sleduje geometrický Wienerův proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{8.1}$$

Nechť f je cena evropské call opce s danou realizační cenou K a časem expirace T. Zisk z takové opce v čase T je

$$(S_T - K)_+ .$$

f závisí na S a t a je tedy funkcí dvou proměnných, $f(S, t)$. Hodnota $f(S, t)$ je cena opce v čase t v situaci, kdy cena akcie je rovna S.

Podle Itôova lemmatu platí pro změnu ceny opce

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 .$$

za dS dosadíme z 8.1, tedy

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\mu S dt + \sigma S dW)^2 .$$

Jelikož $(dt)^2$ a $dtdW$ jsou členy vyššího řádu a víme, že $(dW)^2 = dt$, dostáváme:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW \tag{8.2}$$

Vhodnou kombinací 8.1 a 8.2 můžeme sestavit portfolio z akcií a opcí, jehož výnos je deterministický. Jinak řečeno, můžeme eliminovat stochastický člen dW.

Označme Π hodnotu portfolia složeného z 1 opce a $-\frac{\partial f}{\partial S}$ akcie, tedy

$$\Pi = -\frac{\partial f}{\partial S}S + 1f$$

Pro přírůstek hodnoty portfolia za čas dt máme:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S} \right) dS + 1df.$$

Po dosazení z 8.1 dostaneme

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt,$$

stochastický člen se vyruší.

Přírůstek hodnoty portfolia $d\Pi$ se musí (z neexistence arbitráže) rovnat zisku z bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r, tj.

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Celkem dostaneme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt = r\left(-\frac{\partial f}{\partial S}S + f \right) dt$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial S}Sr = rf$$

To je *Black-Scholesova parciální diferenciální rovnice.*

Po transformaci (substitucích) dostaneme rovnici difuze (rovnici vedení tepla)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

Řešením společně s transformovanou koncovou podmínkou (známe hodnotu $f(T) = (S_T - K)_+$) dostaneme Black-Scholesův vzorec.