Chapter 1

Numerické metody oceňování evropských opcí

Black-Scholesovu rovnici nejdříve převedeme na standardní rovnici vedení tepla (viz. Stochastická analýza). Uvažujme tedy rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

na oblasti $\mathbb{R} \times (0,T)$, s počáteční podmínkou (transformovanou výplatní funkcí příslušné opce)

$$u(x,0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

a přetransformovanými okrajovými podmínkami pro $x \to \pm\infty$ (připomeňme že například pro hodnotu call opce $V(S,t)$ platí $V \to 0$ pro $S \to 0$ a $V \to S$ pro $S \to \infty$).

Jako první krok budeme diskretizovat oblast $\mathbb{R} \times (0,T)$. Zvolíme prostorový krok $h > 0$ a časový krok $k > 0$. Předpokládejme, že $k = \frac{T}{m}$, jinak řečeno m je počet dělících podintervalů intervalu $(0,T)$. V oblasti $\mathbb{R} \times (0,T)$ uvažujme síť mřížových bodů

$$x_i = ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \qquad t_j = jk, \quad j = 0, \ldots, m. \tag{1.3}$$

Aproximaci řešení v mřížovém bodě (x_i, t_j) označme u_i^j, tedy

$$u_i^j \approx u(x_i, t_j). \tag{1.4}$$

Parciální derivace budeme aproximovat příslušnými diferencemi. Uvažujme Taylorův rozvoj 2. řádu v bodě (x_i, t_j) . Máme $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$, tedy

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \tag{1.5}$$

a analogicky

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3). \tag{1.6}$$

Odečtením

$$u_{i+1}^j - u_{i-1}^j = 2 \frac{\partial u}{\partial x} h + O(h^3) \tag{1.7}$$

a vydělením h

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \tag{1.8}$$

s chybou $O(h^2)$ pro $h \to 0$. To je aproximace první derivace pomocí *centrální diference*.

Sečtením rovnic (s přidáním členů 3. řádu, které se vyruší) dostaneme po úpravě a vydělení h^2 aproximaci druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \tag{1.9}$$

Pro časovou derivaci použijeme aproximaci pomocí *dopředné diference*. Máme

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t} k + O(k^2) \tag{1.10}$$

Odtud

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \tag{1.11}$$

s chybou $O(k)$.

Dosazením aproximací do rovnice vedení tepla dostaneme pro u_i^j rovnici

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{1.12}$$

s chybou $O(k + h^2)$ pro $h, k \to 0$. Tedy hodnotu na časové vrstvě $j + 1$ lze explicitně vyjádřit pomocí hodnot na vrstvě j,

$$u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1 - 2\gamma) u_i^j + \gamma u_{i+1}^j, \tag{1.13}$$

kde $\gamma = \frac{k}{h^2}$.

Pro konečnost výpočtu musíme ještě omezit obor proměnné x. Zvolíme N tak velké, abychom hraniční hodnoty u_{-N}^j a u_N^j mohli aproximovat pomocí okrajových podmínek.

Označme u^j vektor řešení na časové vrstvě j, tedy

$$u^j = (u_{-N+1}^j, \ldots, u_{-1}^j, u_0^j, u_1^j, \ldots, u_{N-1}^j) \tag{1.14}$$

je vektor v $\mathbb{R}^{2N-1}$. V maticovém zápisu tak dostaneme

$$u^{j+1} = Au^j + b^j \tag{1.15}$$

pro $j = 0, \ldots, m-1$, kde A je tridiagonální matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & \cdots & & \\ & & & \cdots & \gamma \\ & & & \gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

a

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma u^j_{-N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u^j_N \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Pokud platí takzvaná *Courant-Lewy-Fridrichsova podmínka stability*

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \tag{1.18}$$

tedy

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{1.19}$$

pak je explicitní metoda stabilní. To znamená, že přibližná řešení konvergují pro $h, k \to 0$ k přesnému řešení.

1.1 Metoda binomického stromu

Pokud zvolíme

$$h = \sqrt{2k} \tag{1.20}$$

bude $\gamma = \frac{1}{2}$ a člen s koeficientem $1 - 2\gamma = 0$ vypadne. Metoda pak má tvar

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2} u^j_{i-1} + \frac{1}{2} u^j_{i+1}, \tag{1.21}$$

tedy u_i^{j+1} je aritmetický průměr hodnot řešení ve vrstvě t_j.

1.2 Implicitní metoda

V implicitní metodě pro aproximaci časové derivace namísto dopředné diference použijeme zpětnou diferenci,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} \tag{1.22}$$

s chybou $O(k)$. Tedy u_i^j splňuje rovnici

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{1.23}$$

opět s chybou $O(k + h^2)$ pro $h, k \to 0$. Tedy

$$-\gamma u_{i-1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1} \tag{1.24}$$

kde $\gamma = \frac{k}{h^2}$. Omezíme se opět na konečnou posloupnost prostorových bodů x_i, $i = -N + 1, \dots N - 1$. Pak dostaneme soustavu rovnic

$$Au^{j+1} = u^j + b^j \tag{1.25}$$

pro $j = 0, \dots m-1$, kterou vyřešíme vhodnou numerickou metodou (obvykle iterační metodou, viz. níže). A je v tomto případě matice

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1+2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & \dots & & \\ & & & \dots & \gamma \\ & & & \gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

a b je vektor

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma u_{-N}^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u_N^j \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

kde hodnoty řešení v krajních bodech x_{-N} a x_N aproximujeme pomocí okrajových podmínek.

Hlavní výhodou implicitní metody je stabilita pro libovolnou hodnotu γ. Posloupnost přibližných řešení tedy vždy konverguje k přesnému řešení.

Chapter 2

Americké opce

Připomeňme, že americká kupní opce je kontrakt který dává majiteli právo koupit podkladové aktivum kdykoliv v časovém intervalu $[0, T]$ za realizační cenu K, kde T je čas expirace opce.

Označme V^{AC} resp. V^{EC} hodnotu americké, resp. evropské call opce, a analogicky pro put opce. Zřejmě platí

$$V^{AC}(S,t) \geq V^{EC}(S,t) \tag{2.1}$$

a stejně tak pro put opci. Navíc cena americké call opce musí splňovat

$$V^{AC}(S,t) \geq \max(S_t - K, 0). \tag{2.2}$$

Opravdu, jinak by existovala zřejmá arbitráž : koupíme opci a okamžitě ji uplatníme. To dá zisk $S_t - K$, celkem pak máme $S_t - K - V^{AC} > 0$.

Graf ceny americké call opce tedy nikdy neprotne graf výplatní funkce opce. Na druhé straně, ukážeme že pro evropskou put opci i pro call s dividendou graf ceny protne graf výplatní funkce.

Pro evropskou put opci (bez dividendy) máme

$$V^{EP}(S,0) = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{2.3}$$

tedy

$$V^{EP}(0,0) = Ke^{-rT} < K = K - S. \tag{2.4}$$

Podobně pro evropskou call opci na akcii s dividendovou mírou d máme

$$V^{EC}(S,0) = Se^{-dT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2). \tag{2.5}$$

Tedy

$$\lim_{S\to\infty} \frac{V^{EC}}{S} = e^{-dT} < 1 \tag{2.6}$$

a tedy

$$V^{EC}(S,0) < S - K \tag{2.7}$$

pro dostatečně velké $S >> K$.

Hodnota americké put opce je tedy větší než hodnota příslušné evropské opce a totéž platí pro call opci s dividendou.

2.1 Ocenění amerických opcí

Pro ocenění americké put opce, případně call opce s dividendou musíme vedle hodnoty řešení V^{AC} najít také funkci $S_u(t)$ která popisuje hranici předčasného uplatnění. Ta má následující vlastnosti:

— Je-li $S < S_u(t)$ pak $V^{AC}(S,t) > \max(S-K,0)$ a opci budeme dále držet. Pro malou změnu času platí stejný jistící argument jako pro evropskou opci. Tedy v oblasti $0 < t < T$ a $S < S_u(t)$ platí Black-Scholesova rovnice.

— Je-li $S \geq S_u(t)$, pak $V^{AC}(S,t) = max(S-K,0)$ a opci uplatníme

Matematická formulace vypadá následovně:

Chceme najít funkci $V^{AC}(S,t)$ společně s funkcí $S_u(t)$ popisující hranici předčasného uplatnění, tak, aby platilo

— Funkce $V = V^{AC}(S,t)$ splňuje Black-Scholesovu diferenciální rovnici.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.8}$$

na časově proměnné oblasti $0 < t < T$ a $S < S_u(t)$.

— jsou splněny koncové podmínky pro call opci

$$V(S,T) = \max(S_T - K, 0) \tag{2.9}$$

— jsou splněny okrajové podmínky pro americkou call opci

$$V(0,t) = 0 \tag{2.10}$$

$$V(S_u(t),t) = S_u(t) - K \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_u(t),t) = 1 \tag{2.12}$$

(pro odvození třetí podmínky viz. cvičení). V další části si ukážeme jak tuto úlohu řešit numericky.

2.2 Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

V této části si ukážeme iterační metodu řešení systému lineárních rovnic, nazývanou SOR metoda, kterou lze adaptovat i na řešení úloh lineární komplementarity, tedy problému na který vede oceňování amerických opcí.

Nechť $\omega > 0$ je zvolený parametr (tzv. relaxační parametr). Nechť

$$A = L + D + U \tag{2.13}$$

je rozklad matice A na diagonální část (D) a dolní a horní trojúhelníkovou matici (L a U).

Chceme řešit rovnici

$$Au = b. \tag{2.14}$$

To je ekvivalentní rovnici

$$Du = Du + \omega(b - Au). \tag{2.15}$$

Z rozkladu $A = L + D + U$ dostaneme

$$(D + \omega L)u = (1 - \omega)Du - \omega Uu + \omega b. \tag{2.16}$$

Matice $D + \omega L$ je invertovatelná, tedy u řeší úlohu

$$u = T_\omega u + c_\omega \tag{2.17}$$

kde

$$T_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)Du - \omega U) \tag{2.18}$$

a

$$c_\omega = \omega(D + \omega L)^{-1}b. \tag{2.19}$$

Pomocí matice T_ω definujeme rekurentní posloupnost přibližných řešení úlohy $Au = b$,

$$u^0 = C \tag{2.20}$$

pro zvolený vektor C (např. $C = 0$) a

$$u^{p+1} = T_\omega u^p + c_\omega \tag{2.21}$$

pro $p = 1, 2, \ldots,$ Pokud posloupnost u^p konverguje k nějakému vektoru u, pak zřejmě platí

$$u = T_\omega u + c_\omega, \tag{2.22}$$

tedy u je řešení původní úlohy $Au = b$.

Konvergenci dostaneme pomocí Banachovy věty o kontrakci. Pokud dokážeme, že ve vhodné normě (např. spektrální, kdy je norma rovna maximu z absolutních hodnot vlastních čísel)

$$\|T_\omega\| < 1, \tag{2.23}$$

pak zobrazení

$$u \longrightarrow T_\omega u + c_\omega \tag{2.24}$$

je kontrakce

Platí následující věta:

Věta 2.1. *Pro tridiagonální diagonálně dominantní matici existuje* $\omega_0 \in (1,2)$ *pro které je spektrální norma minimální, a platí*

$$\|T_{\omega_0}\| < 1. \tag{2.25}$$

2.3 Lineární komplementarita pro americké opce

Pro americkou call a put opci platí parciální diferenciální nerovnost

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \tag{2.26}$$

pro všechna $S \in (0,\infty)$ a $t \in (0,T)$. Pro ověření tohoto tvrzení uvažujme americký call s dividendami. Víme, že pro $0 < S < S_u(t)$ platí Black-Scholesova rovnice, tedy nastává rovnost. Je-li naopak $S \geq S_u(t)$ pak

$$V(S,t) = \max(S-K,0) = S-K \tag{2.27}$$

neboť $S_u(t) \geq K$. Dosazením funkce $S-K$ do levé strany Black-Scholesovy rovnice dostaneme

$$(r-d)S - r(S-K) = rK - dS \leq rK - DS_u(t) \leq 0, \tag{2.28}$$

neboť platí

$$S_u(t) \geq K\max(\frac{r}{d},1) \tag{2.29}$$

(dk.: cvičení). Tedy hodnota americké call opce splňuje následující úlohu lineární komplementarity

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \tag{2.30}$$

$$V(S,t) \geq \max(S-K,0) \tag{2.31}$$

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV)(V(S,t) - \max(S-K,0)) = 0 \tag{2.32}$$

pro $S \in (0,\infty)$ a $t \in (0,T)$.

2.4 Řešení úlohy o lineární komplementaritě

Máme dánu matici A a vektory b a g. Chceme řešit úlohu o lineární komplementaritě v diskrétním tvaru

$$Au \geq b, \qquad u \geq g \tag{2.33}$$

a

$$(Au - b)(u - g) = 0, \tag{2.34}$$

kde všechny tři vztahy jsou chápány po složkách.

Nechť A je tridiagonální a diagonálně dominantní matice, tedy platí

$$\alpha_i > |\beta_i| + |\gamma_i|, \tag{2.35}$$

pro každé i, kde α_i jsou hodnoty na hlavní diagonále a β_i, γ_i hodnoty na vedlejších diagonálách.

2.4.1 Projektovaná SOR metoda

V každém jednotlivém kroku přejdeme od vektoru aproximace u^p k u^{p+1} tak aby platilo

$$u^{p+1} \geq g. \tag{2.36}$$

Pak se ukáže že limita těchto aproximací je opravdu řešení úlohy.

Definujeme posloupnost aproximací řešení úlohy vztahy

$$u^0 = C, \qquad u^{p+1} = \max(T_\omega u^p + c_\omega, g), \tag{2.37}$$

kde maximum opět bereme po složkách.

Platí

Věta 2.2. *Pokud posloupnost u^p konverguje k u, pak u je řešením úlohy.*

Označme

$$F(u) = \max(T_\omega u + c_\omega, g). \tag{2.38}$$

Zřejmě F je nelineární zobrazení. Nicméně důkaz toho že je to kontrakce se redukuje na ověření stejné vlastnosti pro lineární operátor T.

Věta 2.3. *F je kontrakce pokud $\|T_\omega\| < 1$, tedy pokud T samo o sobě je kontrakce.*

2.5 Numerické metody pro americké opce

Chceme řešit úlohu lineární komplementarity

$$(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(u(x,t) - g(x,t)) = 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0 \tag{2.40}$$

a

$$u(x,t) - g(x,t)) \geq 0 \tag{2.41}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$. Funkce $g(x,t)$ je transformovaná výplata příslušného typu opce. Provedeme diskretizaci jako v případě evropských opcí. Pro příslušné aproximace funkcí u a g označíme u^j a g^j hodnoty na časové vrstvě t_j, tedy

$$u^j = (u^j_{-N+1}, \dots, u^j_{N-1}) \in \mathbb{R}^{2N-1} \tag{2.42}$$

Opět zvolíme N tak velké, abychom mohli v krajních bodech aproximovat řešení pomocí okrajových podmínek, jako u evropských opcí.

Můžeme vzít

$$u^j_{-N} = g(x_{-N}, t_j), \qquad u^j_N = g(x_N, t_j) \tag{2.43}$$

protože pro velké hodnoty x je okrajová podmínka přibližně rovna příslušné počáteční podmínce. Pak diskrétní verze úlohy o lineární komplementaritě má vektorový tvar

$$Au^{j+1} \geq u^j + b^j, \qquad u^{j+1} \geq g^{j+1}, \qquad j = 0, \dots, m-1 \tag{2.44}$$

$$(Au^{j+1} - b)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i = 0, \tag{2.45}$$

pro všechna $i = 1, \dots, 2N-1$. Matice A je stejná jako u implicitní metody pro evropské opce, tedy tridiagonální matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1+2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & \dots & & \\ & & & \dots & \gamma \\ & & & \gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

a

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma g(x_{-N}, t_{j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma g(x_N, t_{j+1}) \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Řešení najdeme opět pomocí projektované SOR metody.