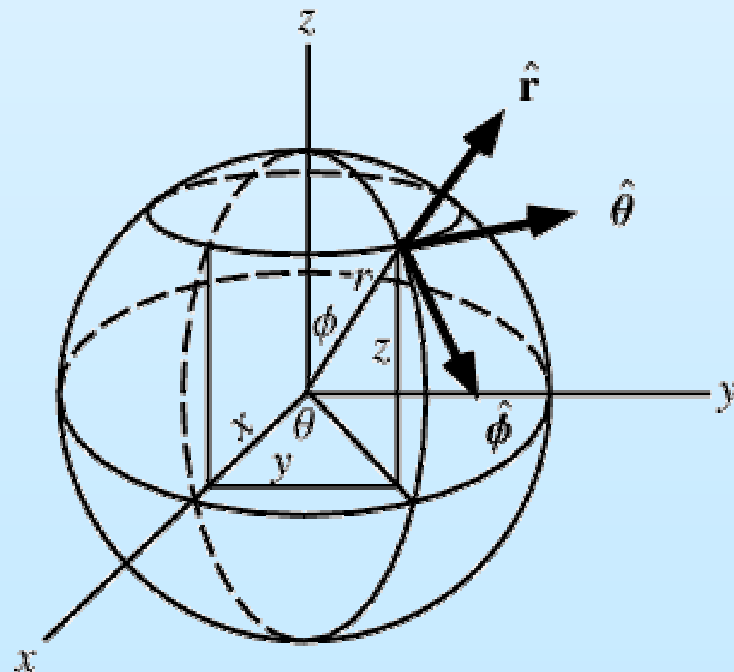


Záření v atmosféře

Milan Šálek
salek@chmi.cz

Souřadnicové systémy

- kartézské souřadnice $[x, y, z]$
- polární souřadnice $[\theta, \phi, r]$

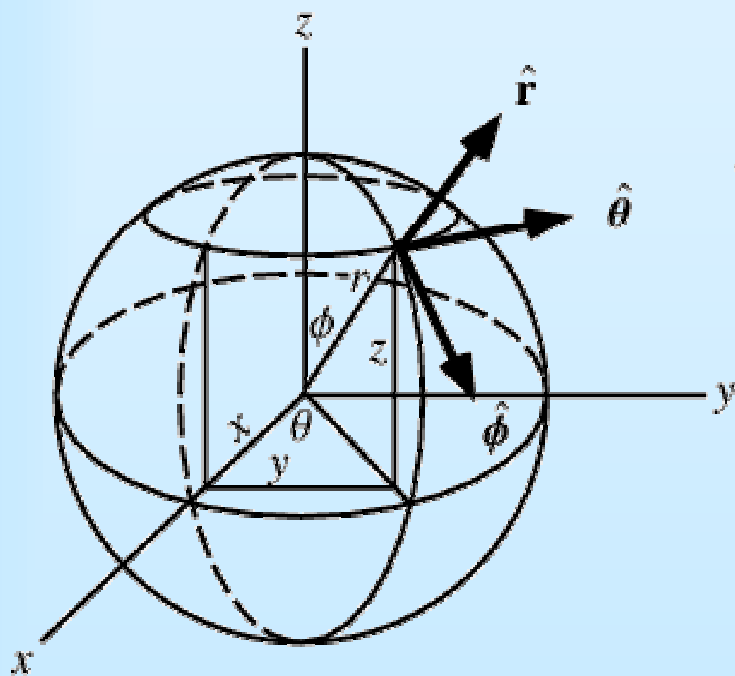


Polární souřadnice

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r} \right),$$



kde $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

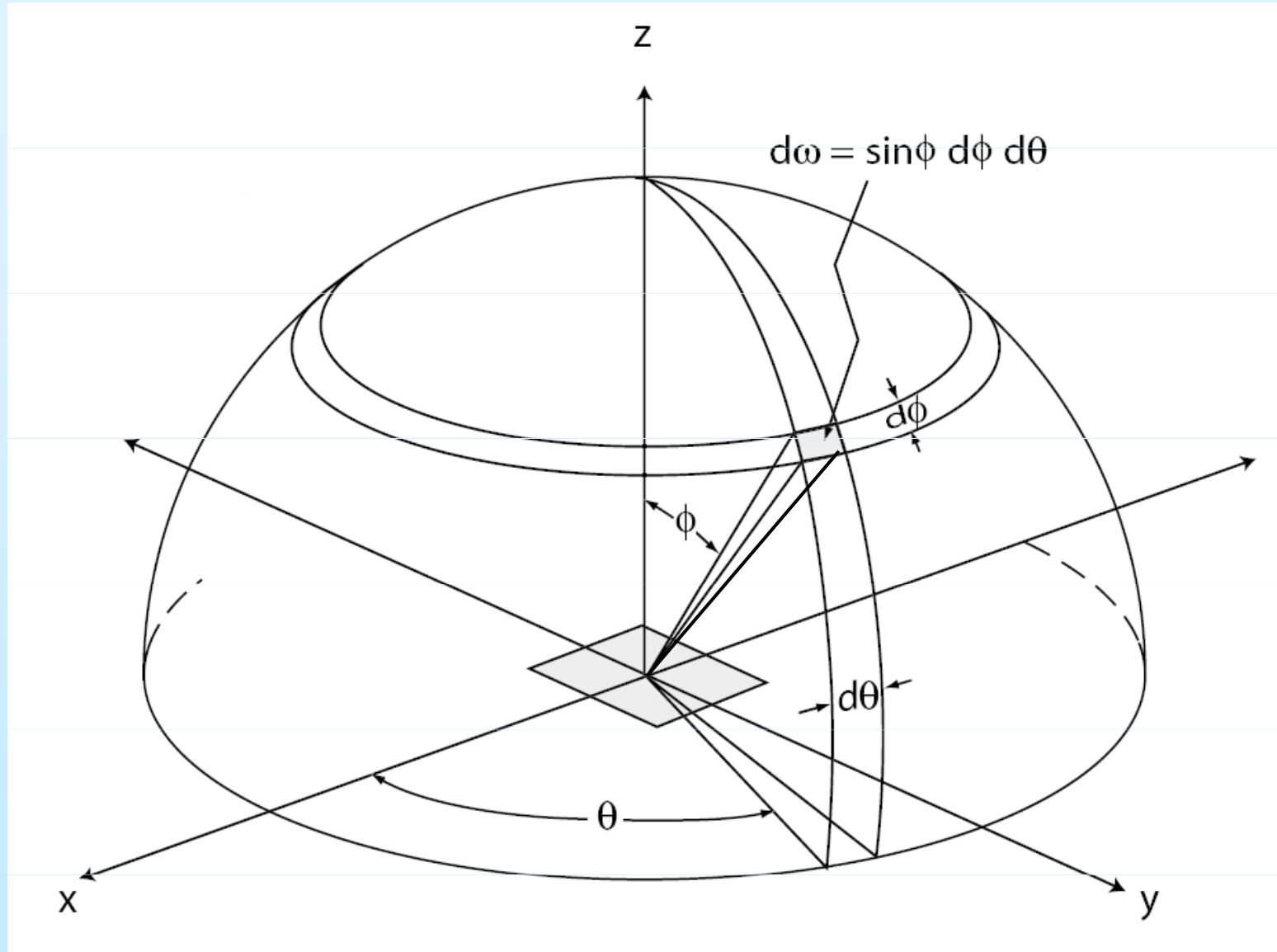
a $\phi \in [0, \pi]$.

$$x = r \cos \theta \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \phi.$$

Prostorový úhel („solid angle“) element prostorového úhlu



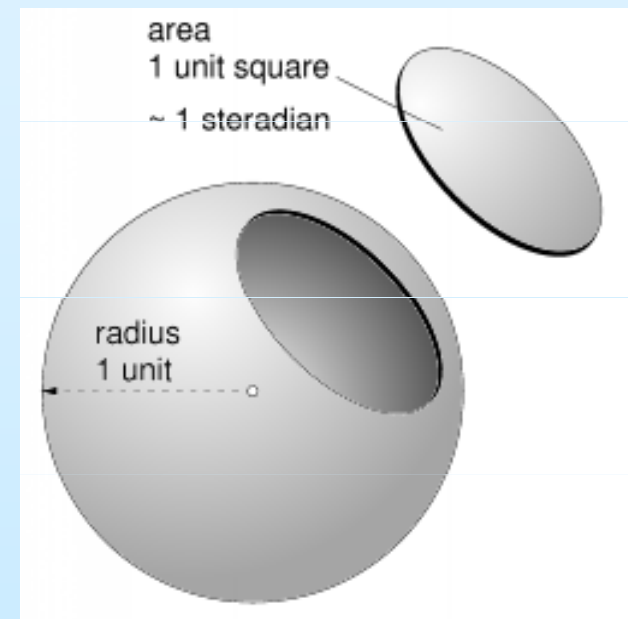
Prostorový úhel („solid angle“)

$$w[\textit{steradian}] = A / r^2$$

Prostorový úhel určujeme jako plochu, kterou vytíná kužel omezující prostorový úhel z kulové plochy o jednotkovém poloměru.

Prostorový úhel celé koule: 4π

Prostorový úhel o velikosti 1 steradián může přibližně znázorňovat kužel vycházející ze středu koule o konstantním vrcholovém úhlu (úhlu od kolmice k podstavě) přibl. $32,8^\circ$ (0,572 rad)



Elektromagnetické záření

- Zákony šíření elektromagnetického záření vycházejí z Maxwellových rovnic elmg. pole

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \nabla \times \vec{D} = \rho_c, \quad \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = 0.$$

- Pro vzduch platí: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

\vec{E} , resp. \vec{H} – intenz. el., resp. magn. pole

\vec{D} , resp. \vec{B} – elektr., resp. magnet. indukce

\vec{j} – hustota el. proudu,

ρ_c – hustota rozlož. volného el. náboje

ε_0 – elektrická permitivita vakua, ε_r – relativní elektrická permitivita

μ_0 – magnetická permeabilita vakua, μ_r – relativní magnetická permeabilita

Elektromagnetické záření (pokr.)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \sigma - \text{el. vodivost prostředí}$$

Z řešení Maxwellových rovnic vyplývá mj. i vlnový charakter elmg. záření

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, c - \text{rychlost světla ve vakuu}$$

Elektromagnetické záření

- Šíření *elektromagnetických vln* v (atmosférickém) prostředí
- Elmg. vlny:
 - elektrické a magnetické pole šířící se prostorem značnou rychlostí („rychlostí světla“, což je též elmg. zář. , $c=3 \cdot 10^8$ m/s“)
 - interagují s prostředím a objekty ležícími na jejich dráze

Charakteristiky vlnového pohybu

Parciální řešení rovnice jednoduchého harmonického oscilátoru: $\frac{d^2 y}{dt^2} + ly = 0$, y - výchylka, l - konstanta

$$y = Y \cos(\omega t + \varphi_0)$$

ω - úhlová rychlost (kruhová frekvence)

φ_0 - fázový úhel

t - čas

Y - amplituda (oscilátoru)

Charakteristiky vlnového pohybu

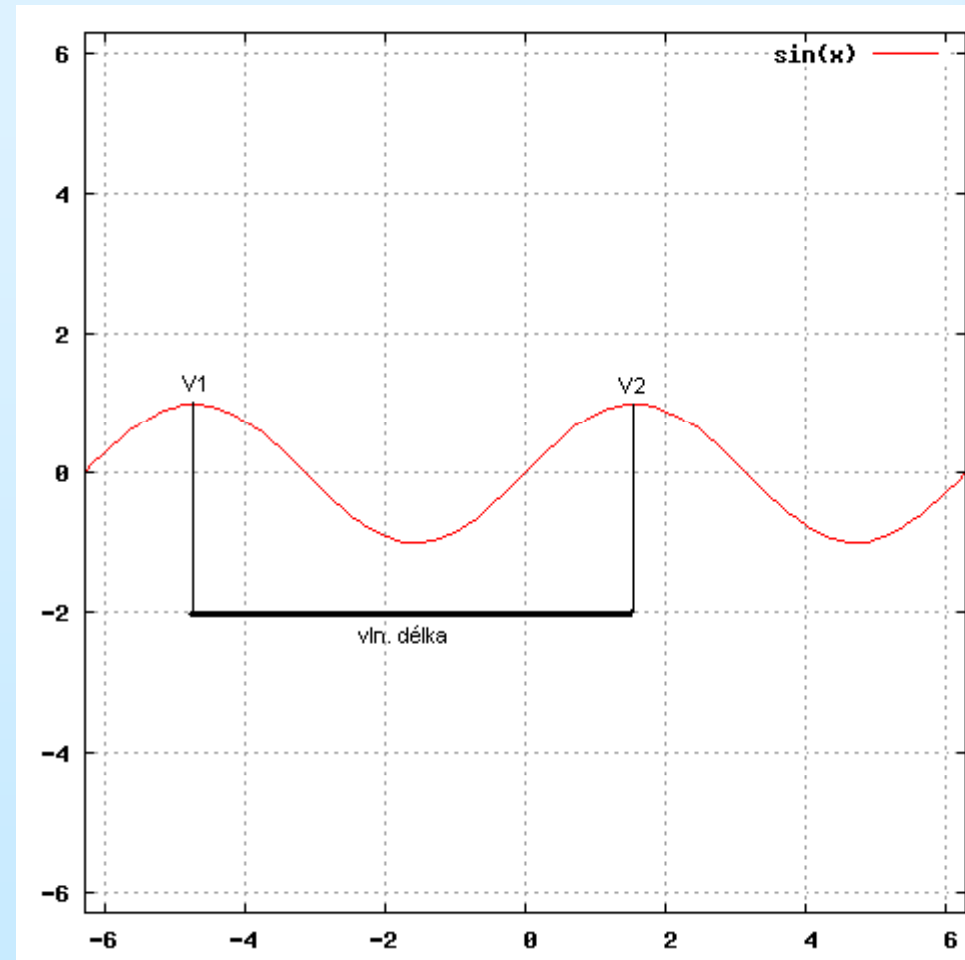
- šíření vln rychlostí c

$$c = \lambda / \tau = \lambda \nu$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

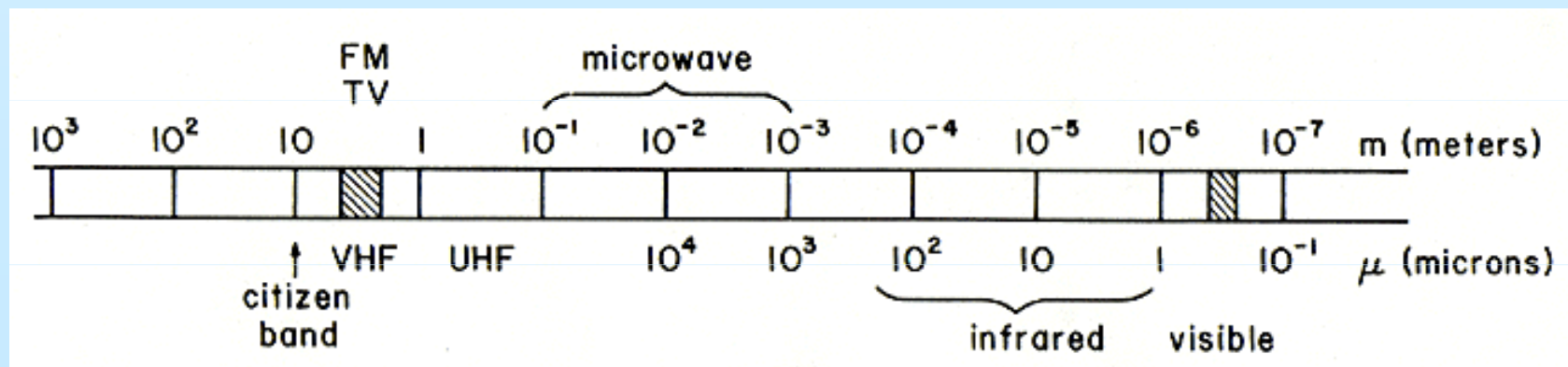
$$\nu = \frac{1}{\tau} \text{ - frekvence}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \text{ - vln. číslo}$$



Elmg. vlny

<u>Frequency Band</u>	<u>Frequency (Mhz)</u>	<u>wavelength (cm)</u>	<u>Met. example</u>
UHF	300-1000	30-100	Profiler
L	1000-2000	15-30	
S	2000-4000	7.5-15	10 cm
C	4000-8000	4-7.5	5 cm
X	8000-12500	2.5-4	3 cm
K	> 12500	about 1	8 mm



Pomůcka pro přepočet frekvence a vlnové délky

$$\nu[\text{Hz}] = \frac{c[\text{m} / \text{s}]}{\lambda[\text{m}]} = \frac{3 \cdot 10^8 [\text{m} / \text{s}]}{\lambda[\text{m}]}$$

$$\nu[\text{GHz}] = \frac{0.3}{\lambda[\text{m}]} = \frac{30}{\lambda[\text{cm}]}$$

$$\lambda[\text{cm}] = \frac{30}{\nu[\text{GHz}]}$$

Šíření elmg. záření v atmosféře

- přiblížení: atmosféra je dielektrikum, tudíž

$$\vec{j} = 0$$

- nezajímá nás el. pole buzené volnými el. náboji

$$\rho_c = 0$$

Šíření elmg. záření v atm. (pokr.)

- Z řešení Maxwellových rovnic vyplývá vlnová rovnice, kde rychlost postupu vlnění

$$\vec{v} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

- V atmosféře pro viditelné světlo platí :

$$\mu_r \text{ se blíží } 1 \Rightarrow \vec{v} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Šíření elmg. záření v atm. (pokr.)

- Útlum (zeslabení) elmg. paprsků v atmosféře, případně v dalších objektech (srážky) rozptylem, případně absorpcí
- Odraz, lom elmg. paprsků
- Snellův zákon

čarami představuje vlnoplochu příslušející elektromagnetickému vlnění vytvář
 mu svazek rovnoběžných paprsků dopadajících na uvažované rozhraní v okra
 kdy prvý z vyznačených dvou paprsků dosáhne bodu A, zatímco druhá odp
 vlnoploše příslušející lomeným paprskům v okamžiku, kdy druhý paprsek se
 částečně odrazí a lomí v bodě B. Z triviálních vlastností vlnoploch je okamžitě zř

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$v_1 > v_2$ - lom ke kolmici

n_{21} - relativ. index lomu

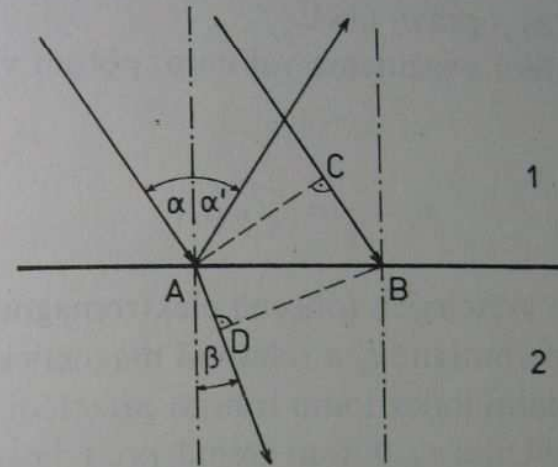
index lomu = refractive index

- má 2 složky:

$$m = n - i\kappa$$

kde κ reprezentuje absorpci

vzduch: $\kappa=0$



4.1 Lom světelných paprsků na rozhraní dvou opticky různých prostředí.

že čas t potřebný na to, aby světelný paprsek urazil v prostředí 1 dráhový úse
 musí být roven času, za který lomený paprsek proběhne v prostředí 2 dráhu dél
 To však znamená

$$AD = v_2 t,$$

$$CB = v_1 t,$$

a dosadíme-li odtud do (4,23), dostáváme

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{CB}{AD} = \frac{\frac{CB}{AB}}{\frac{AD}{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

což vyjadřuje základní zákon lomu světelných (elektromagnetických) pap
 jenž se označuje

Absolutní index lomu

- index lomu prostředí vůči vakuu:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

- rel. index lomu: $n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{v_1}{c}}{\frac{v_2}{c}} = \frac{n_2}{n_1}$

Šíření elmg. vln v atm. (pokr.)

- index lomu n je v atmosféře závislý na hustotě (pro viditelné světlo)
- pro mikrovlny („radarové“ vlny) závisí též
 - na *vlhkosti vzduchu*
 - na hustotě volných elektronů v jednotkovém objemu vzduchu (významné pouze v ionosféře, v troposféře zanedbáváme)

Šíření elmg. vln v atm. (pokr.)

- index lomu n v atmosféře: $n \cong 1.0003$
- vhodnější jednotka: $N \equiv (n - 1)10^6 \cong 300$

$$N = \frac{77,6}{T} \left(P + 4810 \frac{e}{T} \right) - 4,03300 \cdot 10^7 \frac{N_e}{f^2}$$

P [hPa] – atm. tlak

e [hPa] – parc. tlak vodní páry

T [K] – teplota vzduchu

N_e – počet volných elektronů v m^3 vzduchu

f – frekvence radarových vln

Refrakce mikrovln v atmosféře

- změny v refrakci jsou podstatně větší ve vertikálním směru
- Za normálních atmosférických podmínek N klesá s výškou

Refrakce mikrovln v atm. (pokr.)

- křivost trajektorie elmg. (radarového) paprsku:
 - Diferenciální změna tečného vektoru křivky vzhledem ke délkovému elementu křivky
$$C = \frac{d\vec{\theta}}{ds}$$
 - pro kružnici platí: $C = \frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{1}{R}$
 - křivost je při orientaci po směru hod. ručiček záporná

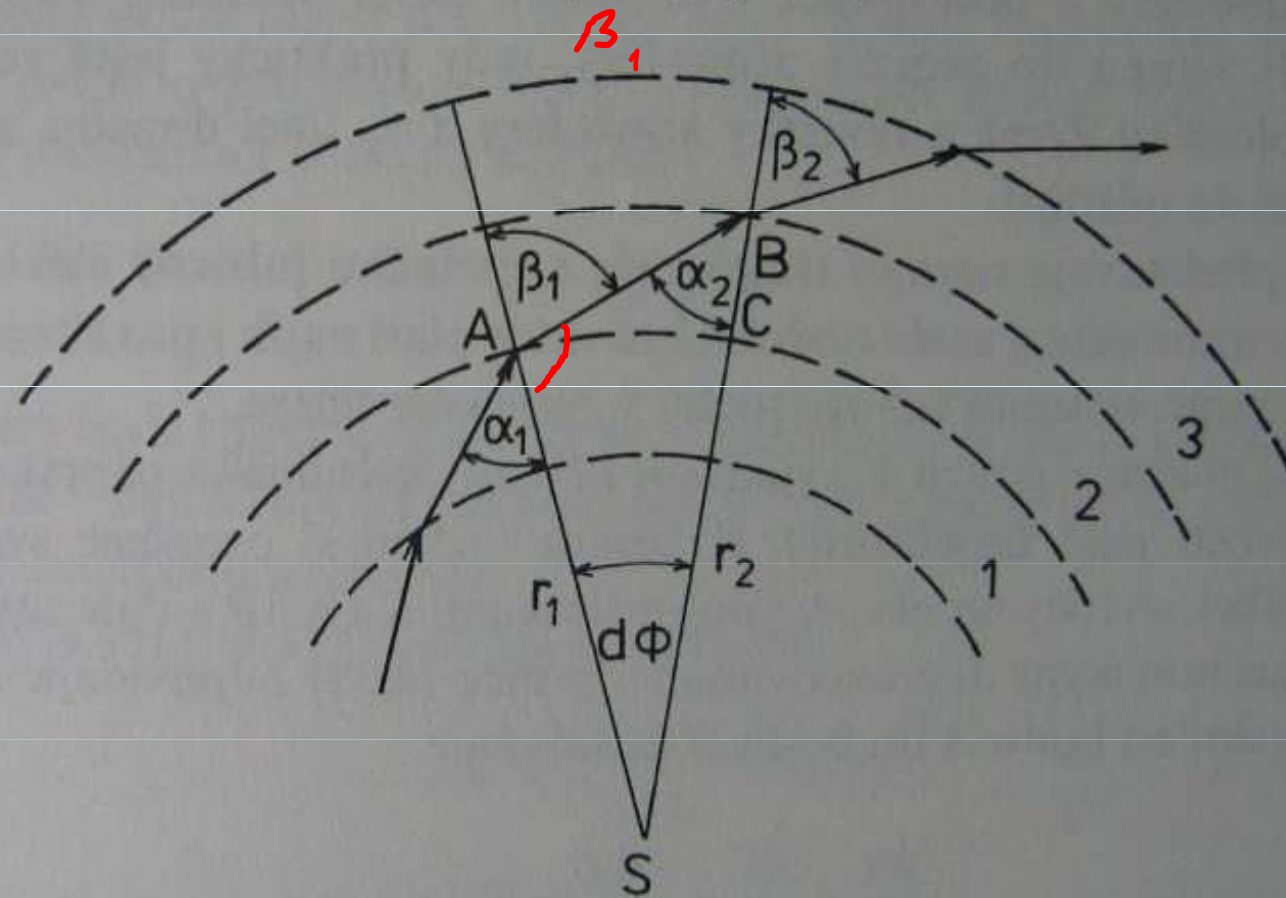
Trajektorie světelného paprsku v atmosféře

- $n = f(\rho) = f(z)$
- rozdělení atmosféry na infinitezimální „slupky“, ve kterých považujeme n za konstantu

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{atd.} \quad (4,34)$$

Aplikujeme-li potom na trojúhelník ABS sinovou větu a zavedeme-li označení $AS = r_1$, $BS = r_2$, můžeme okamžitě psát

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin (\pi - \beta_1)} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (4,35)$$



4.3 K odvození rovnice trajektorie elektromagnetického (světelného) paprsku v atmosféře.

Vzhledem k platnosti trigonometrického vzorce

Vzhledem k platnosti trigonometrického vzorce

$$\sin(\pi - \beta_1) = \sin \beta_1$$

odtud obdržíme

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (4,36)$$

a dosazením za $\sin \beta_1$ podle (4,34) získáme vztah

$$n_1 r_1 \sin \alpha_1 = n_2 r_2 \sin \alpha_2. \quad (4,37)$$

Protože uvažované infinitezimální vrstvy můžeme volit zcela libovolně, platí (4,37) pro jakékoliv horizontální rozhraní v atmosféře (rozhraní rovnoběžné s ideálním tvarem povrchu zemského tělesa), tzn., že trajektorie daného paprsku je charakterizována rovnicí

$$n r \sin \alpha = C, \quad (4,38)$$

kde n značí absolutní index lomu vzduchu v určitém bodě, r vzdálenost tohoto bodu od středu Země, α úhel sevřený paprskem a vertikálně orientovanou přímkou,

zatímco C je pro uvažovaný paprsek konstanta určená počátečními podmínkami, které je možno volit různým způsobem podle povahy řešené úlohy. Jde-li např. paprsek vyslaný od zemského povrchu šikmo vzhůru, stanovíme C podle vztahu

$$C = n_0 r_0 \sin \alpha_0, \quad (4,39)$$

v němž n_0 představuje absolutní index lomu vzduchu v úrovni zemského povrchu, r_0 poloměr Země a α_0 úhel dopadu na horizontální rozhraní, se kterým uvažovaný paprsek opouští zemský povrch. V případě, že se naopak jedná o paprsek přicházející z kosmu do atmosféry a postupující v ní šikmo dolů, položíme v (4,39) $n_0 = 1$ (index lomu při vstupu do zemské atmosféry, tedy prakticky ještě ve vakuu), r_0 značí součet poloměru Země a tloušťky atmosféry a α_0 úhel dopadu, s nímž daný paprsek vstoupil do ovzduší.

Vztah (4,38) představuje rovnici trajektorie světelného (obecně elektromagnetického) paprsku v atmosféře a zcela obdobná rovnice platí např. i pro šíření zvukových vln (viz kap. 5), popř. seismických rozruchů v zemském tělese.

Rovnici (4,38) můžeme použít k vyjádření křivosti světelného paprsku v atmosféře (přesněji křivosti jeho trajektorie). K tomuto účelu si označme symbolem $d\Phi$ infinitesimální úhel sevřený na obr. 4.3 polopřímkami SA a SB a dále zavedme $dr = r_2 - r_1$. Logaritmickým diferencováním rovnice (4,38) odpovídajícím elementu trajektorie paprsku od bodu A do bodu B dostáváme

$$\frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \frac{d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 0, \quad (4,40)$$

přičemž pro nekonečně malý úhlový element $d\Phi$ můžeme oblouk \widehat{AC} aproximovat úsečkou a v pravoúhlém trojúhelníku ABC pak platí

trajektorie paprsku od bodu A do bodu B dostáváme

$$\frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \frac{d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 0, \quad (4,40)$$

přičemž pro nekonečně malý úhlový element $d\Phi$ můžeme oblouk \widehat{AC} aproximovat úsečkou a v pravoúhlém trojúhelníku ABC pak platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \, d\Phi}{dr}, \quad (4,41)$$

upustíme-li u veličin α a r od psaní indexů, neboť vrstvu 2 uvažovanou v tomto případě lze volit zcela libovolně. Naposled uvedený vztah ihned upravíme do tvaru

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\Phi}{\operatorname{tg} \alpha},$$

a dosadíme-li odtud za dr/r do (4,40), obdržíme

$$\frac{dn}{n} + \frac{d\Phi + d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 0. \quad (4,42)$$

Z jednoduché geometrické úvahy vyplývá, že celkový úhel stočení paprsku $d\varphi$ v uvažované infinitezimální vrstvě atmosféry (vrstva 2 na obr. 4.3) je roven součtu $d\Phi + d\alpha$, tj.

$$d\varphi = d\Phi + d\alpha, \quad (4,43)$$

příčemž křivost K trajektorie paprsku definujeme jako

$$K = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (4,44)$$

kde ds reprezentuje délku dráhy uražené paprskem v myšlené infinitezimální vrstvě. Z obr. 4.3 (viz vrstvu 2) je zřejmé, že

$$ds = \frac{dr}{\cos \alpha}. \quad (4,45)$$

Křivost K tedy podle (4,44) představuje úhel stočení trajektorie, urazi-li paprsek v atmosféře dráhu o jednotkové délce. Vyjádříme-li stočení paprsku v obloukové míře, potom převrácená hodnota křivosti

$$\frac{1}{K} \equiv r^* \quad (4,46)$$

udává v daném bodě trajektorie poloměr r^* příslušné oskulační kružnice, tj. kružnice, pomocí níž lze v nejbližším (teoreticky nekonečně malém) okolí uvažovaného bodu aproximovat zmíněnou trajektorii.

Dosazením (4,43) a (4,45) do (4,44) dostáváme

$$K = \frac{d\Phi + d\alpha}{dr} \cos \alpha$$

a vzhledem k tomu, že podle (4,42) platí

aproximovat zmiňovanou trajektorii.

Dosazením (4,43) a (4,45) do (4,44) dostáváme

$$K = \frac{d\Phi + d\alpha}{dr} \cos \alpha$$

a vzhledem k tomu, že podle (4,42) platí

$$d\Phi + d\alpha = -\operatorname{tg} \alpha \frac{dn}{n},$$

obdržíme snadno

$$K = -\frac{dn}{n} \frac{\sin \alpha}{dr}. \quad (4,47)$$

V našem případě se můžeme bez podstatnější újmy na přesnosti spokojit představou, že zemské těleso je dokonalá koule a vzdálenost r uvažovaného bodu v atmosféře od středu Země se pak rovná součtu konstantního poloměru zemského tělesa r_z a výšky z nad zemským povrchem, tj.

$$dr \equiv d(r_z + z) = dz, \quad (4,48)$$

neboť $dr_z = 0$. Vztah (4,47) je potom možno upravit do výsledného tvaru

$$K = -\frac{dn}{dz} \frac{\sin \alpha}{n}, \quad (4,49)$$

když dn/dz interpretujeme v daném bodě jako derivaci absolutního indexu lomu vzduchu podle vertikální souřadnice (v tomto případě $dn/dz = \partial n/\partial z$) a K předsta-

Refrakce mikrovln v atm. (pokr.)

$$\frac{\delta n}{\delta z} = -39 \cdot 10^{-6} \text{ [n jednotek/km]}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{\delta n}{\delta z}$$

$R' \approx 8500 \approx 4/3R$ - efektivní poloměr Země

$$H = r \sin(\alpha) + \frac{r^2}{2R'} + H_0$$

$$H = \sqrt{r^2 + R'^2 + 2rR' \sin \alpha} - R' + H_0$$

r - vzdálenost od radaru

α - elevační úhel

H_0 - výška antény

H - výška paprsku

Rozptyl elmg. vln v dokonalém elektrickém vodiči (kapce)

- neexistuje volný el. náboj, tj. použijeme Maxwellovy rovnice, kde

$$\rho_c = 0$$

- Při úpravách Maxwellových rovnic vyjdou vlnové rovnice, kde rychlost postupu je komplexním číslem

$$v_{kompl} = v_r + iv_{im}$$

Rozptyl elmg. vln v dokonalém elektrickém vodiči (kapce)

$$v_{kompl} = v_r + iv_{im}$$

- reálná část komplexní rychlosti: postupná rychlost šíření elmg. vln
- imaginární část: útlum
- kompl. index lomu: $m = \frac{c}{v_{kompl}} = n - i\nu,$
kde ν je absorpční index

Teorie rozptylu elmg záření na sférických částicích

- odvodil asi před 100 lety německý fyzik Gustav Mie (\Rightarrow Mieův rozptyl)

- pro malé částice

$$2\pi a / \lambda \ll 1$$

- platí **Rayleighův rozptyl**

Teorie rozptylu elmg záření na sférických částicích

Rayleighův rozptyl (ve směru původních rozptylujících paprsků) – viz Bednář (1989), s. 139, vzorec (4.187):

$$I(r) = I_0 \frac{16\pi^4 a^6}{\lambda^4 r^2} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 = I_0 \frac{\pi^4 D^6}{4\lambda^4 r^2} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2$$

a, D - poloměr, resp. průměr částice, r - vzdálenost,

m - kompl. index lomu, $I(r)$ - intenzita rozptýleného

záření, I_0 – intenzita rozptylovaného (původního) záření

Efektivní plocha zpětného rozptylu

Backscattering cross section

Efekt. plocha zpětného rozptylu σ rozptylující částice je zdánlivá oblast zachycující a izotropně rozptylující (původní) záření I_0 , které vytváří ve vzdálenosti r intenzitu záření:

$$I(r) = I_0 \frac{\sigma}{4\pi r^2}$$

$$\sigma [cm^2] = \frac{\pi^5 D^6}{\lambda^4} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 = \frac{\pi^5 D^6}{\lambda^4} |K_m|^2$$

$|K_m|^2$ - dielektrická konstanta vody (0,93)

Závislost normalizované efektivní plochy zpětného rozptylu na obvodu rozptylující částice normalizované radarovou vln. délkou

$\frac{\sigma_{sphere}}{\pi a^2}$ - podíl ef. plochy zp.
rozptylu ke geometrické ploše

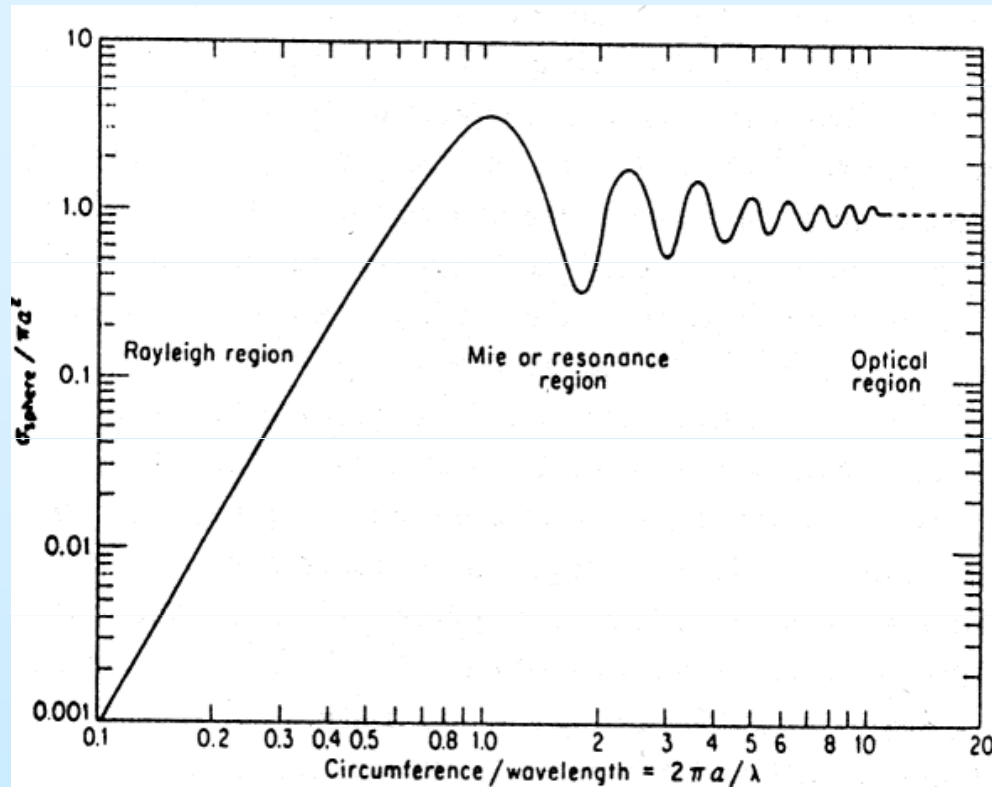


Figure 4.1 Normalized backscattering cross-sectional area of a sphere as a function of circumference normalized by radar wavelength λ . a = radius. From Skolnik, 1980, Introduction to Radar Systems, with permission of McGraw-Hill, Inc.

Záření v atmosféře

- Zákony záření černého tělesa
 - Černé těleso absorbuje veškeré dopadající záření (fyzikální fikce)
 - Záření vysílané povrchem černého tělesa má charakteristické spektrum vlnových délek popsané Planckovým zákonem:

$$E_{\lambda} = C_1 \lambda^{-5} \left(e^{C_2 / \lambda T} - 1 \right)^{-1}$$

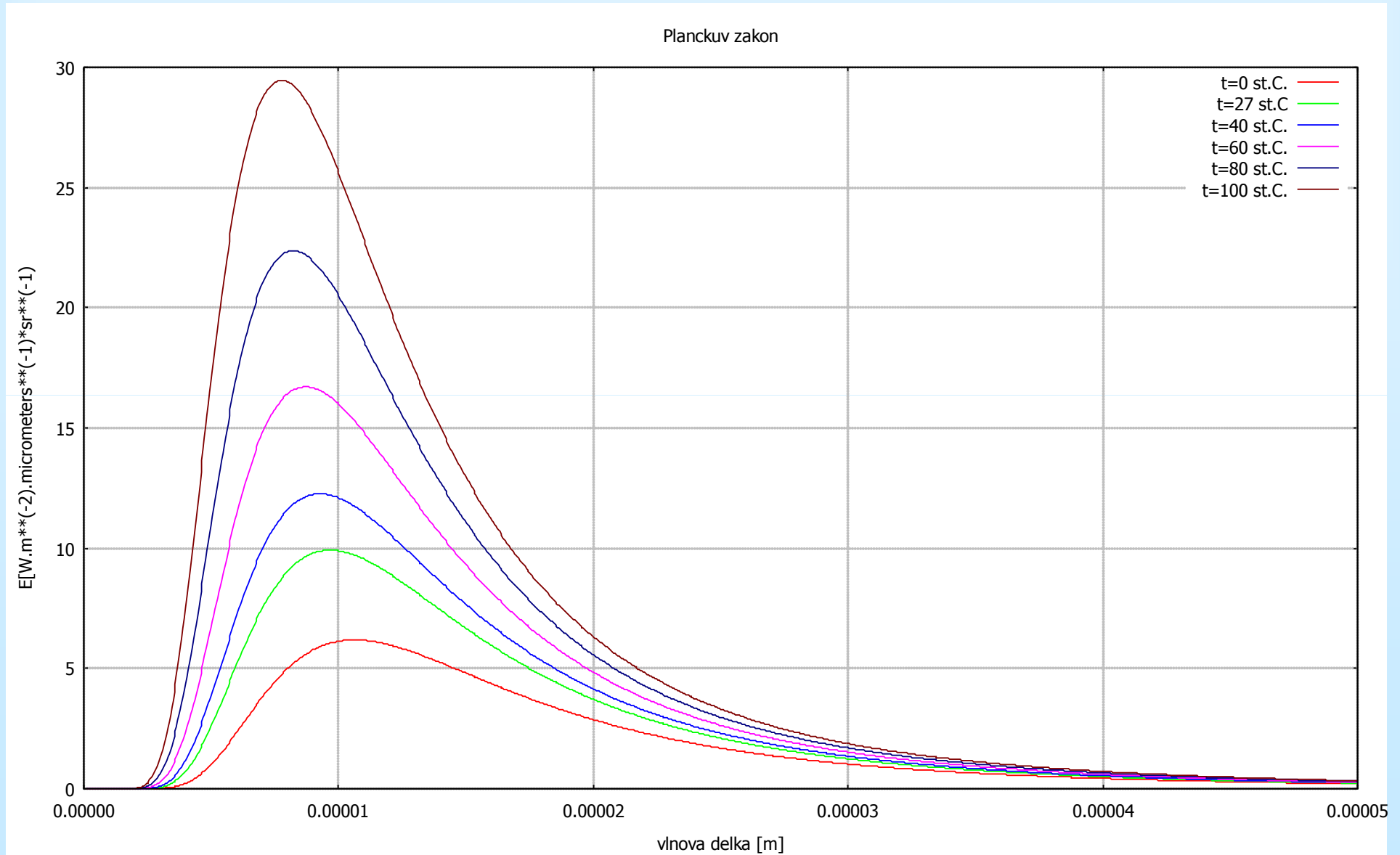
- λ vlnová délka, T – abs. teplota tělesa
- $C_1 = 1.191 \text{ E-16 Wm}^2$, $C_2 = 1.439 \text{ E-2 m.K}$

Záření v atmosféře

- Planckův zákon: Funkce E_λ (někdy značená B_λ) je definovaná tak, že výraz $E_\lambda d\lambda$ představuje množství elmg. záření z intervalu $(\lambda, \lambda+d\lambda)$, jež je za jednotku času vyzařováno jednotkovou plochou povrchu černého tělesa do jednotkového prostorového úhlu ve směru vnější normály

$$E_\lambda = C_1 \lambda^5 \left(e^{C_2 / \lambda T} - 1 \right)^{-1}$$

Průběh funkce E

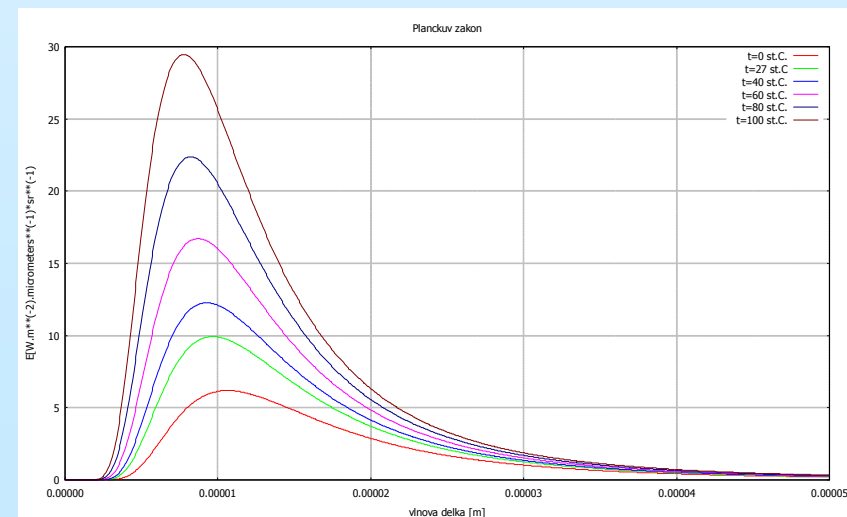


Celkové množství elmg. záření

$$G_B = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda$$

$$G_B = \sigma T^4, \sigma = 1,8 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$$

- Stefanův-Boltzmannův zákon

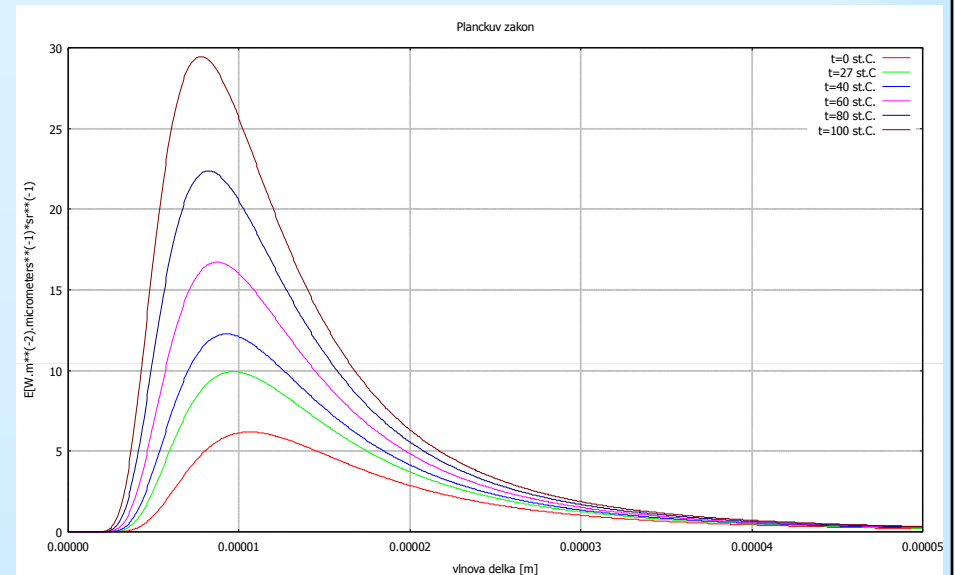


Vlnová délka maxima funkce E

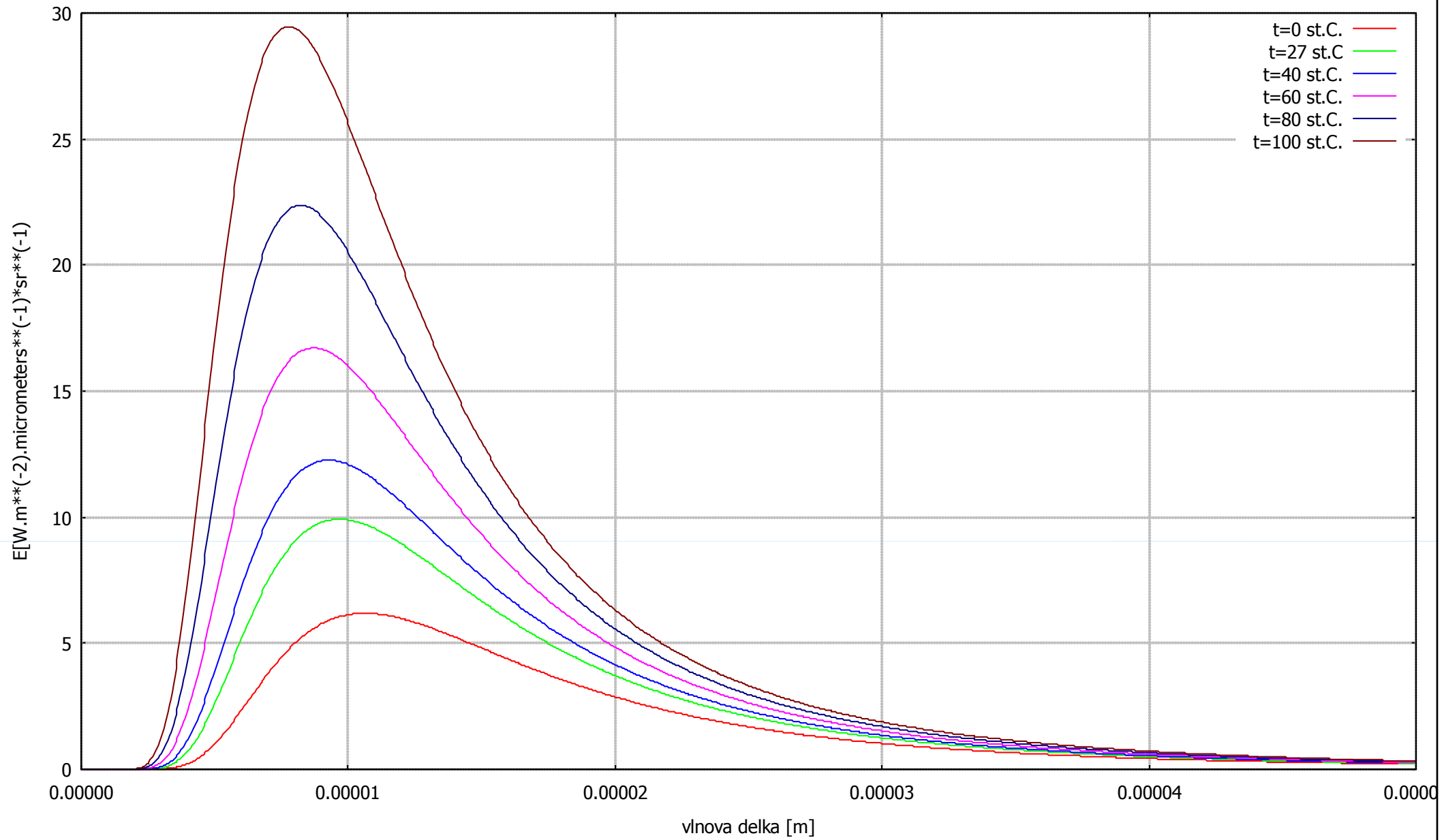
- Wienův zákon:

$$\lambda_{\max} [\mu\text{m}] = \frac{C}{T}, C \approx 2900 [\mu\text{m.K}]$$

- Maximum funkce E při lokálním maximu vlnových délek: $E_{\lambda_{\max}} = k.T^5$



Planckuv zakon

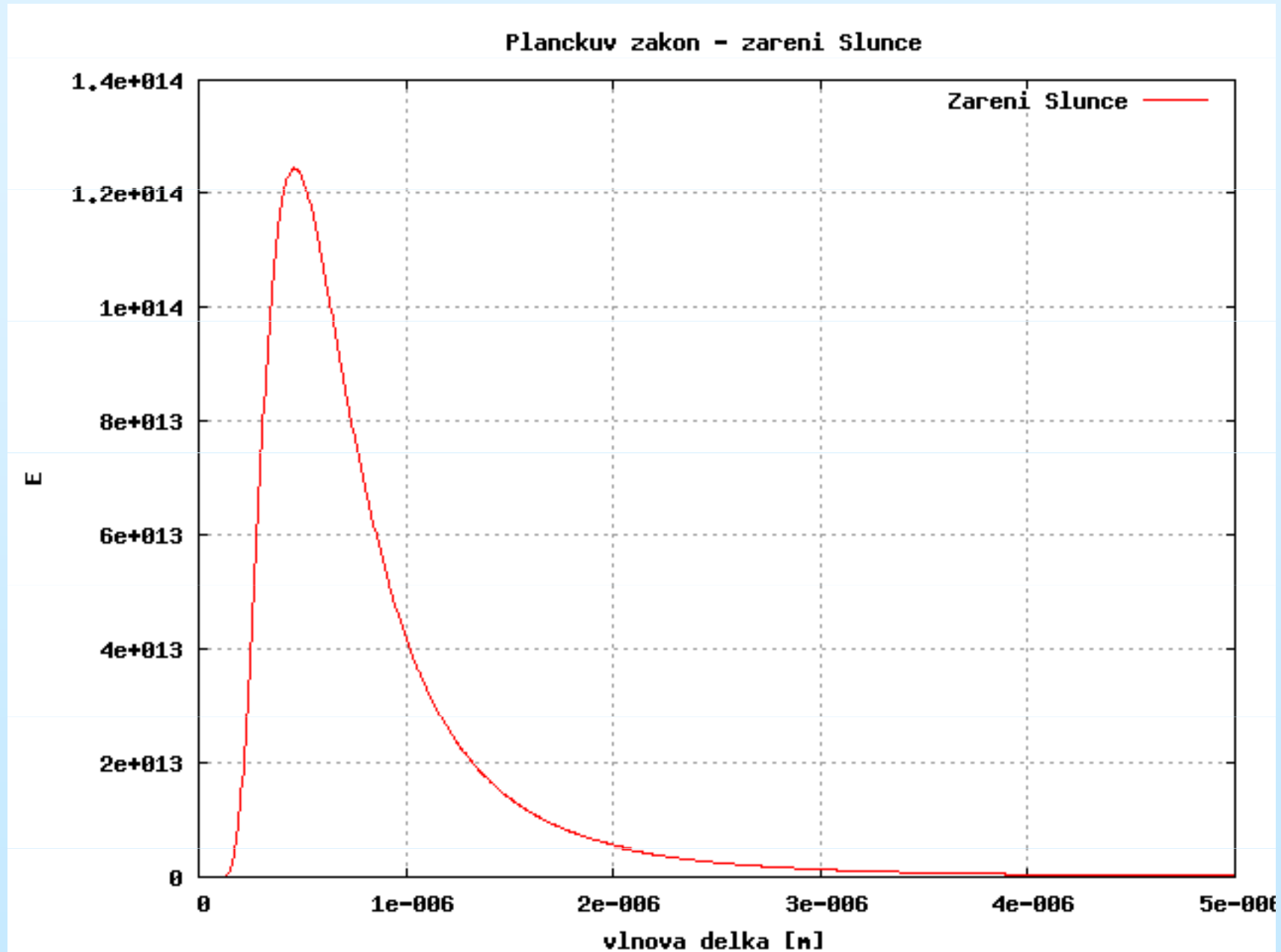


Šedé těleso

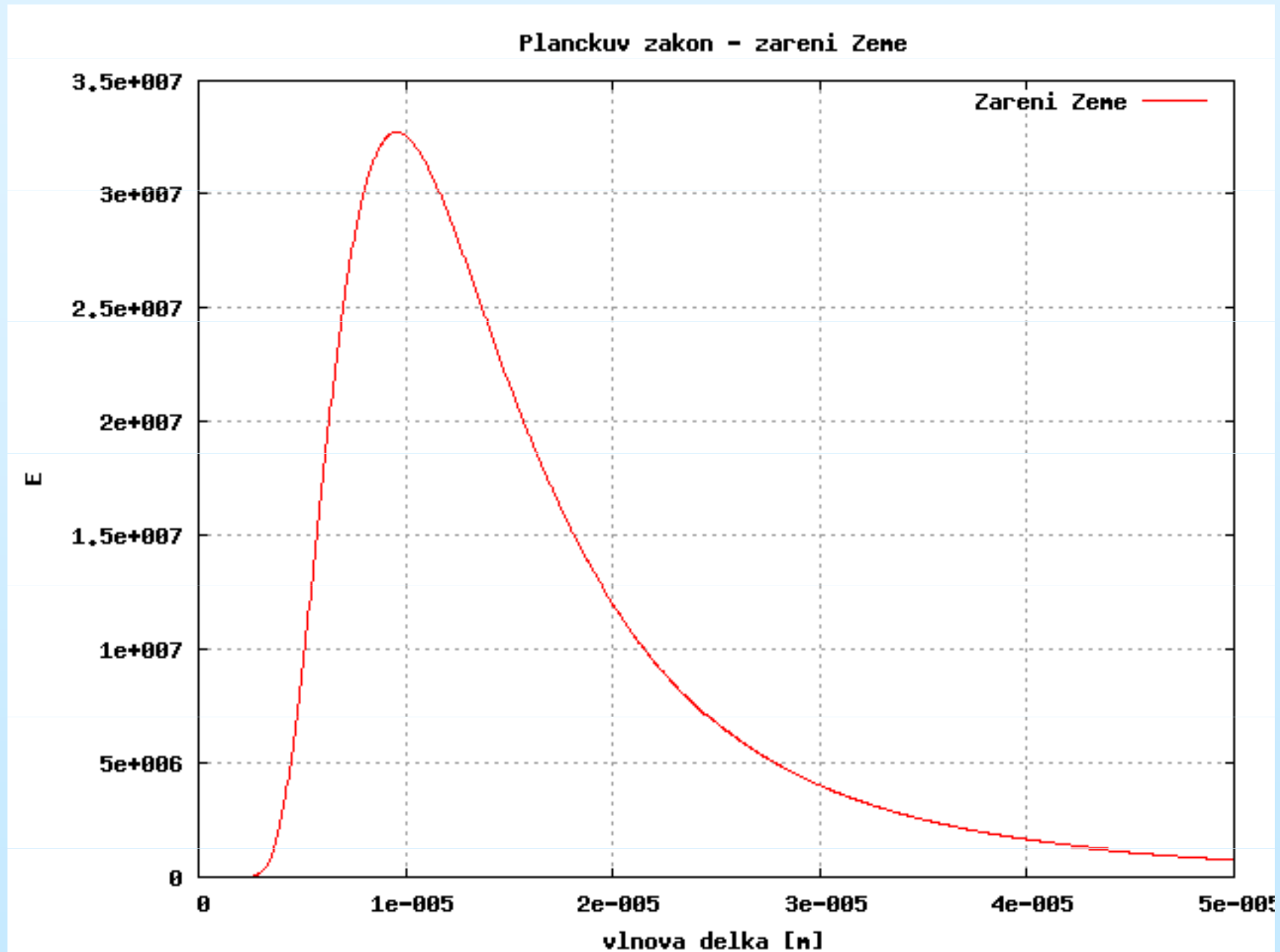
$$E'_{\lambda} = \nu E_{\lambda}, \nu \leq 1$$

- pro většinu zemského povrchu je ν blízké hodnotě 1, proto jej můžeme v prvním přiblížení považovat za dokonale černé těleso bez velké újmy na přesnosti

Záření Slunce (6000 K)

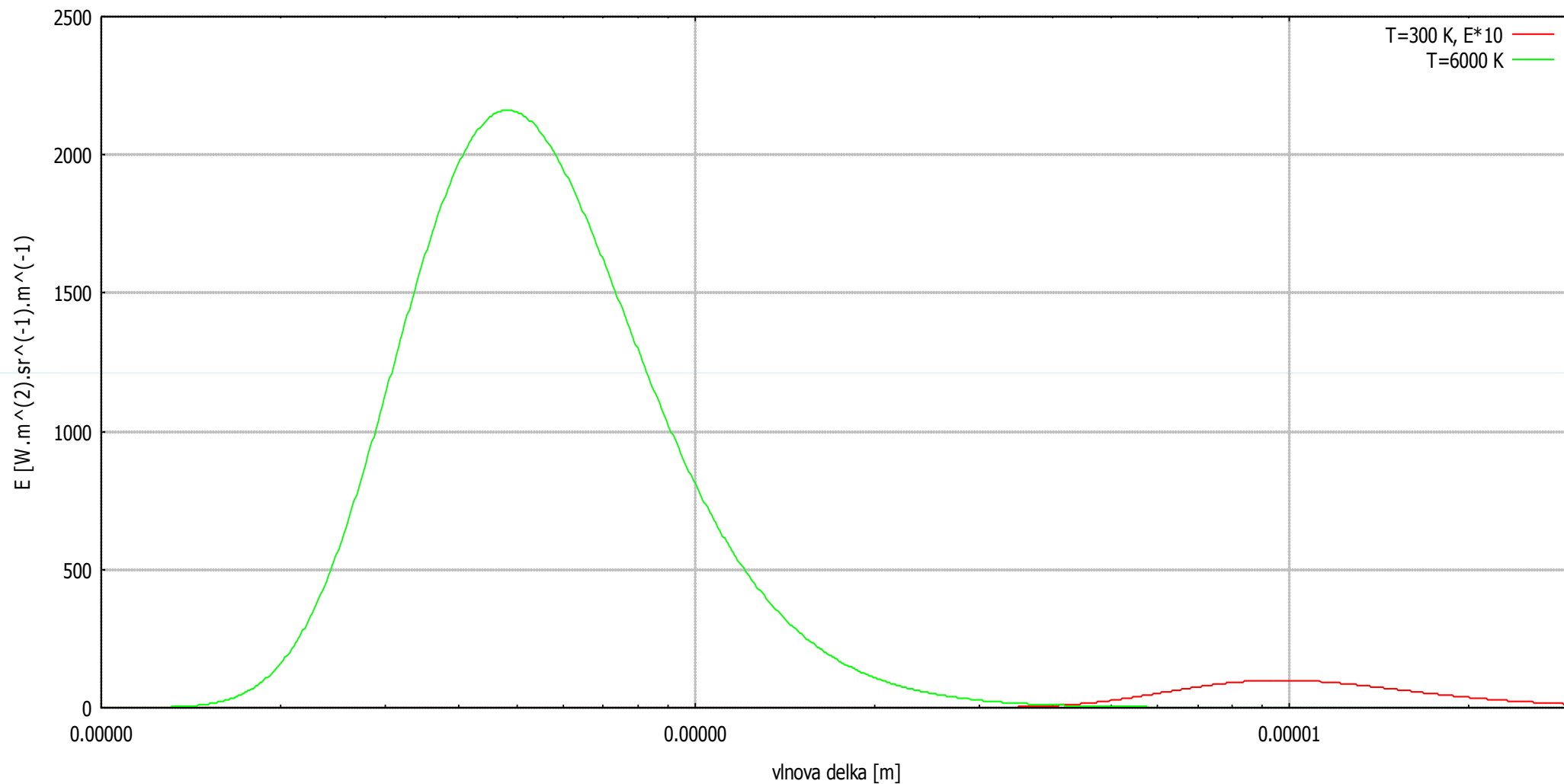


Záření Země (300 K)



Záření Slunce a Země

Spektrální hustota elmg. záření podle Planckova zákona na Zemi



Úkol č. 3

- Nakreslete trajektorie radarových paprsků při průměrném poklesu indexu lomu s výškou pro elevace 0,0; 0,1; 0,5; 1 a 2 st. $H_0=767$ m (výška radaru Skalky).

$$H = r \sin(\alpha) + \frac{r^2}{2R'} + H_0$$

$$R' = 8272 \text{ km}$$

r - vzdálenost od radaru

α - elevační úhel

H_0 - výška antény

Úkol č. 4

- Nakreslete si závislost funkce E charakterizující spektrum záření černého tělesa na vlnové délce a na absolutní teplotě. Vypočítejte maximum funkce E pro teplotu $-20, 10$ a 40°C