SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

II. SIGNÁLY
ZÁKLADNÍ POJMY

MU
IBA

SIGNÁL - DEFINICE

SIGNÁL - DEFINICE

Signál je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

Je-li zdrojem informace živý organismus, pak hovoříme o **biosignálech** bez ohledu na podstatu **nosiče informace**.

SIGNÁLY ☼ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné signály vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) modely;
- ☑ model signálu by měl splňovat dva základní požadavky:
  - → výstižnost, přesnost;
  - → jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE SIGNÁLŮ
(JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

A) Spojité a diskrétní signály

Analogové a digitální (číslicové) signály

B) Reálné a komplexní signály

C) Deterministické a náhodné signály

D) Sudé a liché signály

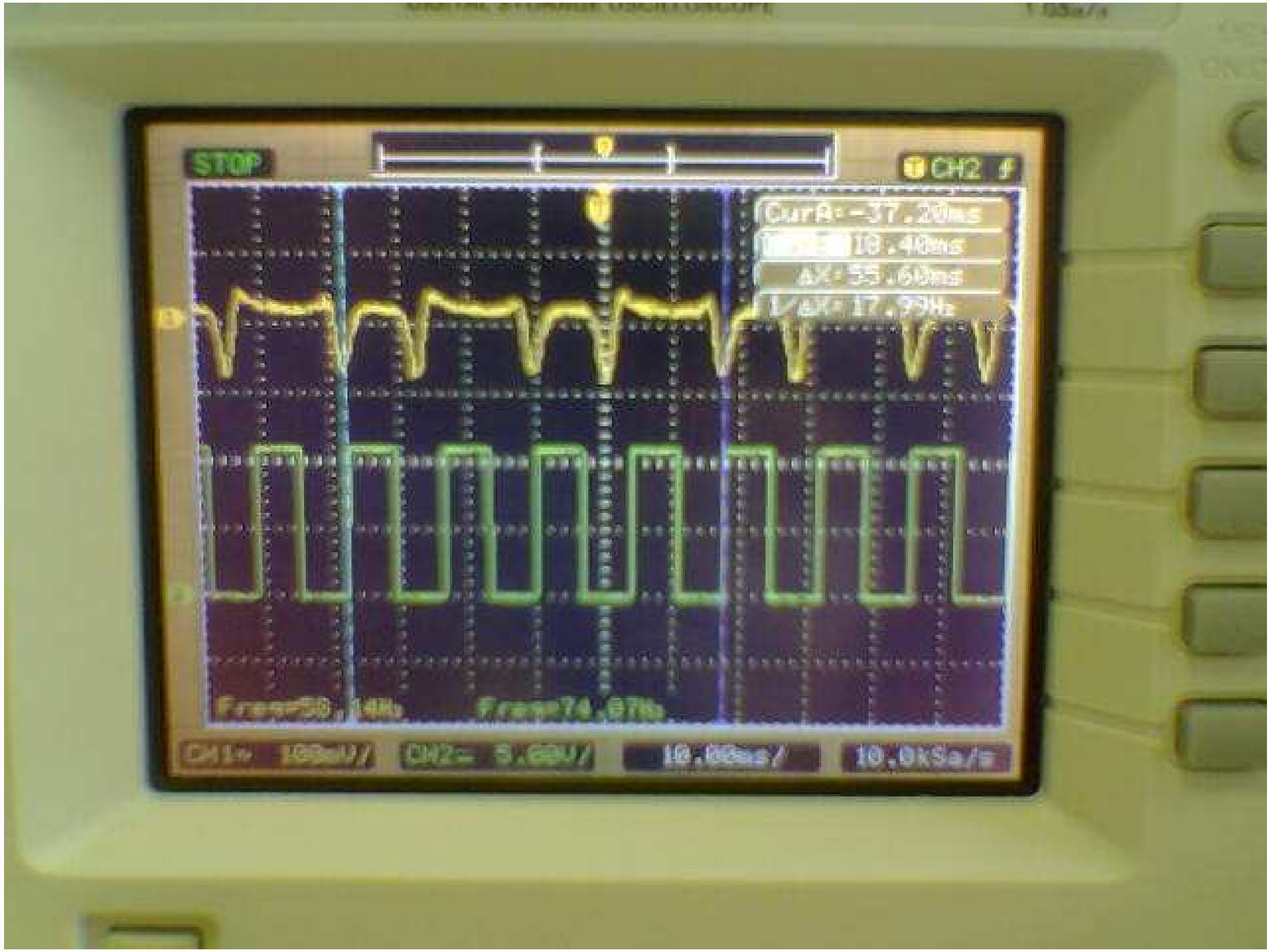
E) Periodické a neperiodické signály

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

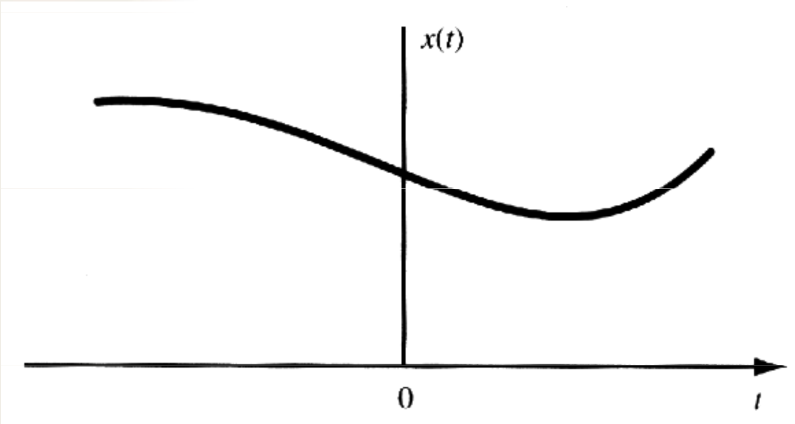
- ☑ **Spojitý signál** (přesněji **signál se spojitým časem**) je takový signál $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- ☑ **Diskrétní signál** (přesněji **signál s diskrétním časem**) je takový signál $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní signál proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. x(nT).

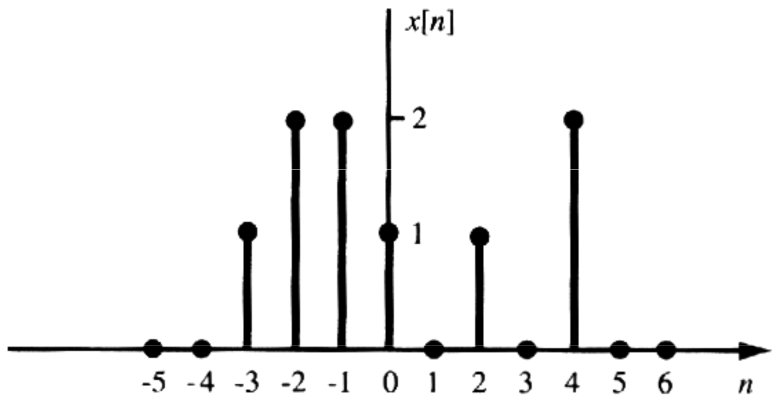
Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitý signál v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál.

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



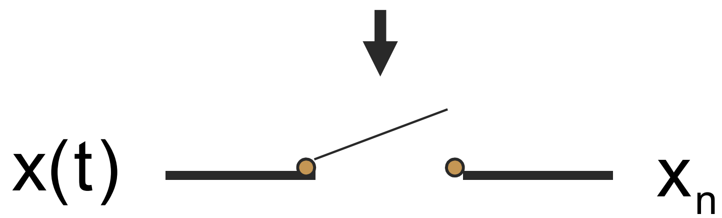
A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY





A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- U diskrétního signálu není hodnota signálu mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní signál lze také získat **vzorkováním** spojitého signálu: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, …, $x(t_n)$, … (též značení x_0, x_1, x_2, …, x_n, …). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- Diskrétní signál vyjádřený posloupností můžeme zapsat
  - funčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad n < 0 \end{cases}$$

  - explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$$

(zde se implicitně předpokládá, že prvky jsou číslovány od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

ANALOGOVÉ A DIGITÁLNÍ (ČÍSLICOVÉ) SIGNÁLY

- **Analogový signál** nabývá hodnot ze spojitého intervalu.
- **Digitální (číslicový) signál** nabývá hodnot z konečné množiny hodnot.

Příkladem analogového signálu může být např. EKG signál zaznamenaný na papír nebo hodnota napětí zobrazená na analogovém osciloskopu.

Příkladem digitálního signálu může být např. barva pixelu digitální fotografie <0;255>.

- **Kvantování** je proces, kterým se převádí spojité hodnoty veličin na diskrétní.

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ SIGNÁLY

- **Reálný signál** je takový signál, který nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- **Komplexní signál** je takový signál, který nabývá komplexních hodnot. (Hypotetický, v praxi neměřitelný.)

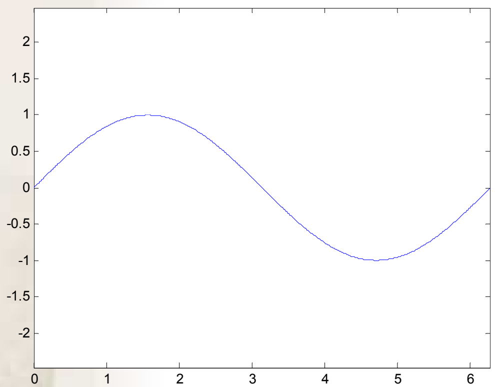
$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

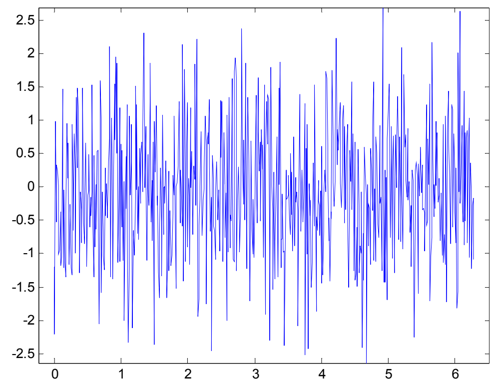
- ☑ **Deterministický signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Takovýto signál může být tedy popsán analytickou funkcí času *t*.

- ☑ **Náhodný (stochastický) signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.



$x(t) = \sin t$

$N(0,1)$



C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

- **Náhodný (stochastický) signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

Náhodný (stochastický) signál (veličina) je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

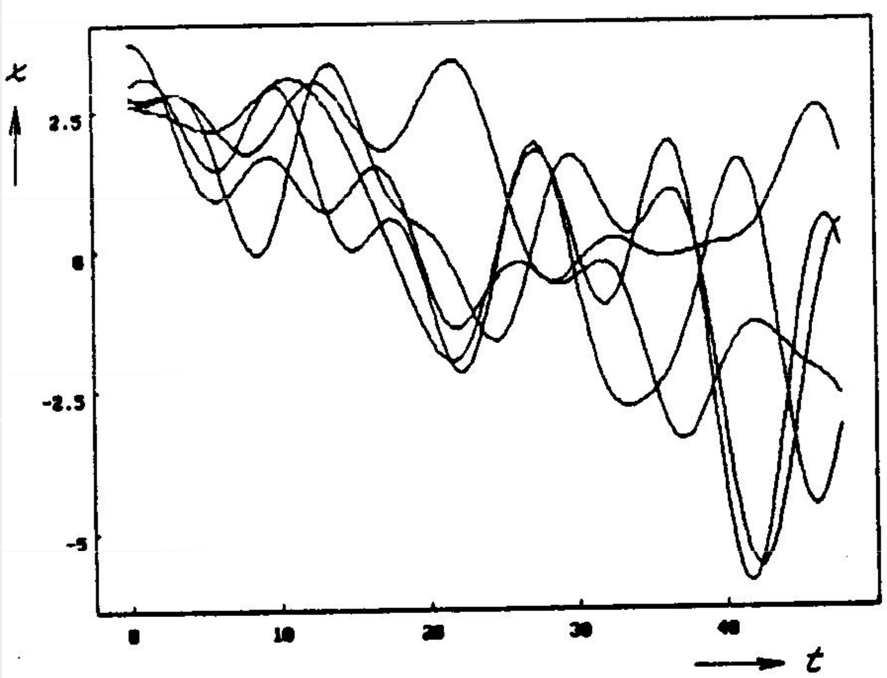
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

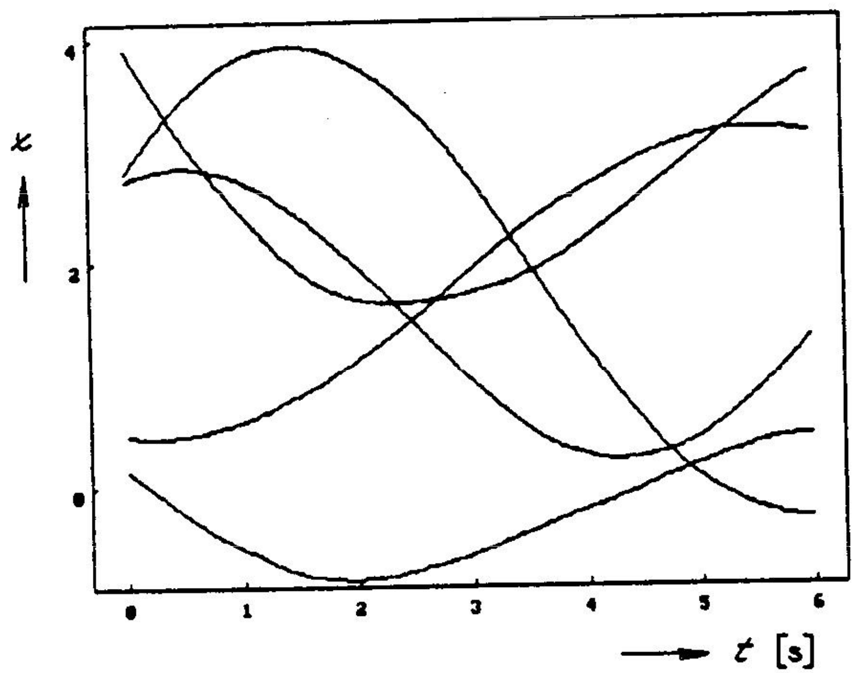
- stacionarita;
- ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním





STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY

- **Sudý signál** je takový, pro který platí

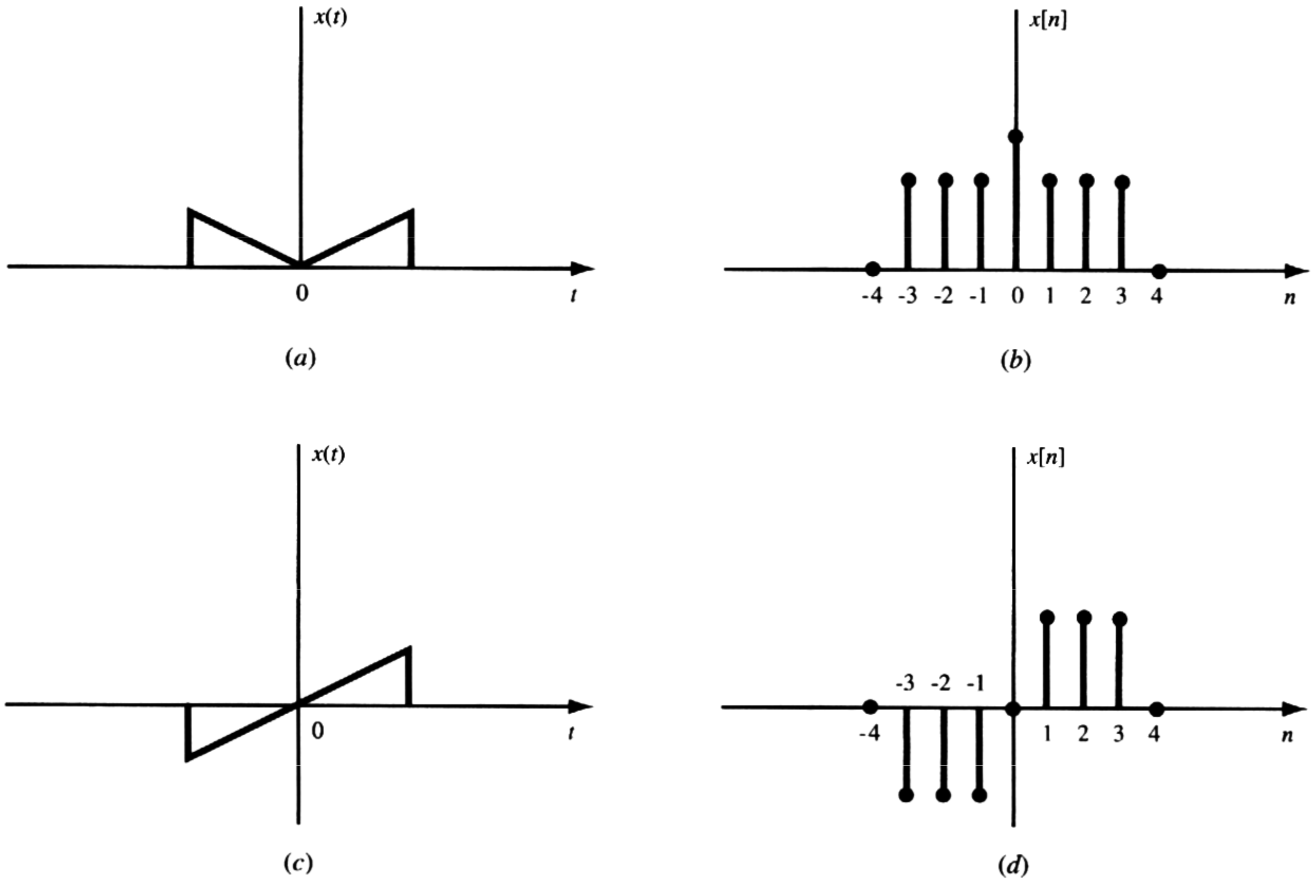
$$x(-t) = x(t), \quad x_{-n} = x_n$$

- **Lichý signál** je takový, pro který platí

$$x(-t) = -x(t), \quad x_{-n} = -x_n$$

- Součin sudého a lichého signálu je lichý signál.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých signálů je sudý signál.

D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY



E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- Spojitý signál $x(t)$ je **periodický s periodou** T, jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

$$x(t+T)=x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota T, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

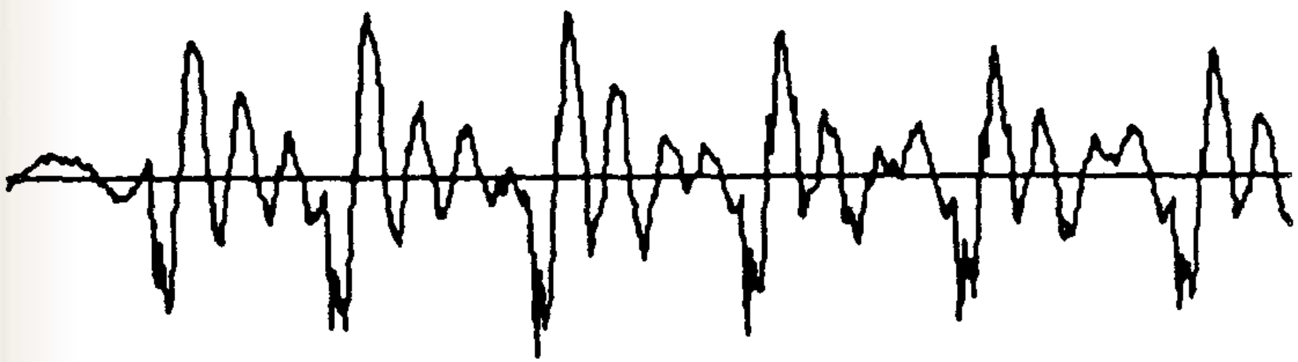
$$x(t+kT)=x(t),$$

kde k je celé číslo.

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- **Pozor!** Pro konstantní signál není definována základní perioda. Konstantní signál je periodický pro každou hodnotu T.
- Spojitý signál, který není periodický se nazývá **neperiodický** nebo **aperiodický**.
- Reálné biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních signálech**.

Pohov!



řečový signál – samohláska „e“

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- Pro diskrétní signál definujeme periodický signál s periodou N obdobně

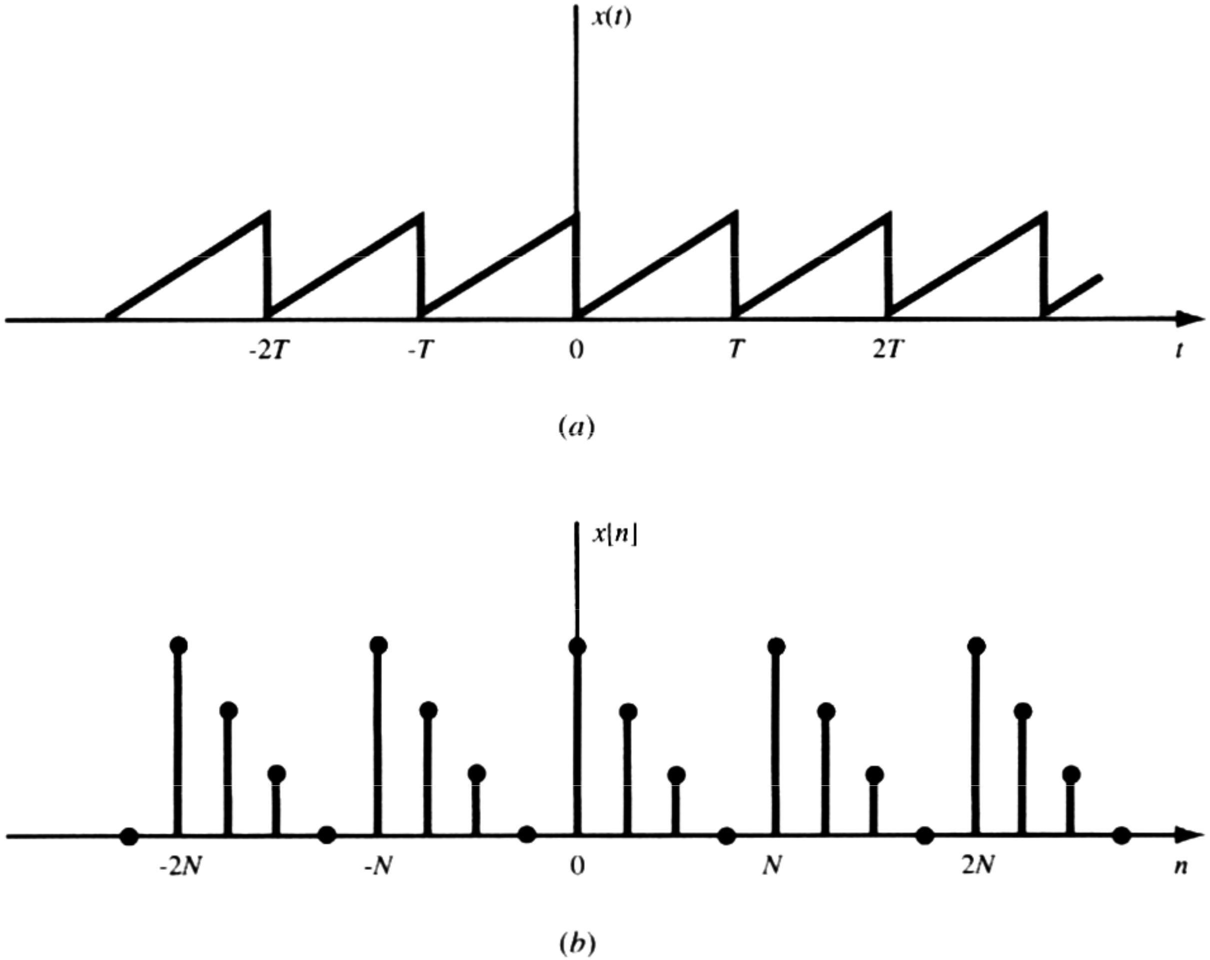
$$x_{n+N} = x_n \qquad \text{a} \qquad x_{n+kN} = x_n$$

Pozor!

- ☑ Diskrétní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

Pohov!

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY



SIGNÁLY SPOJITÉ V ČASE

HARMONICKÝ SIGNÁL

HARMONICKÁ FUNKCE

- **harmonický signál** je popsán funkcí

$$x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde

A>0 je amplituda harmonické funkce

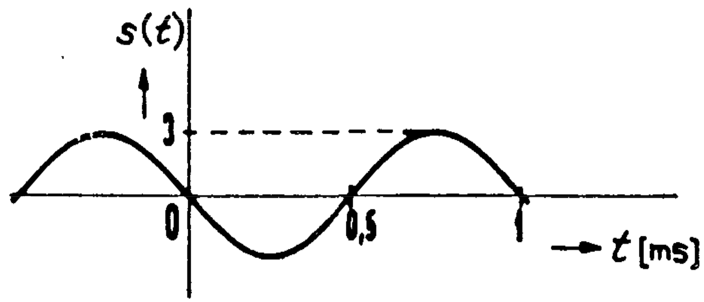
ω >0 je úhlový kmitočet h.f.

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze v čase t=0

$\omega t + \varphi_0$ je fáze harmonické funkce

Perioda harmonické funkce je dána vztahem

$$T = 2\pi/\omega$$

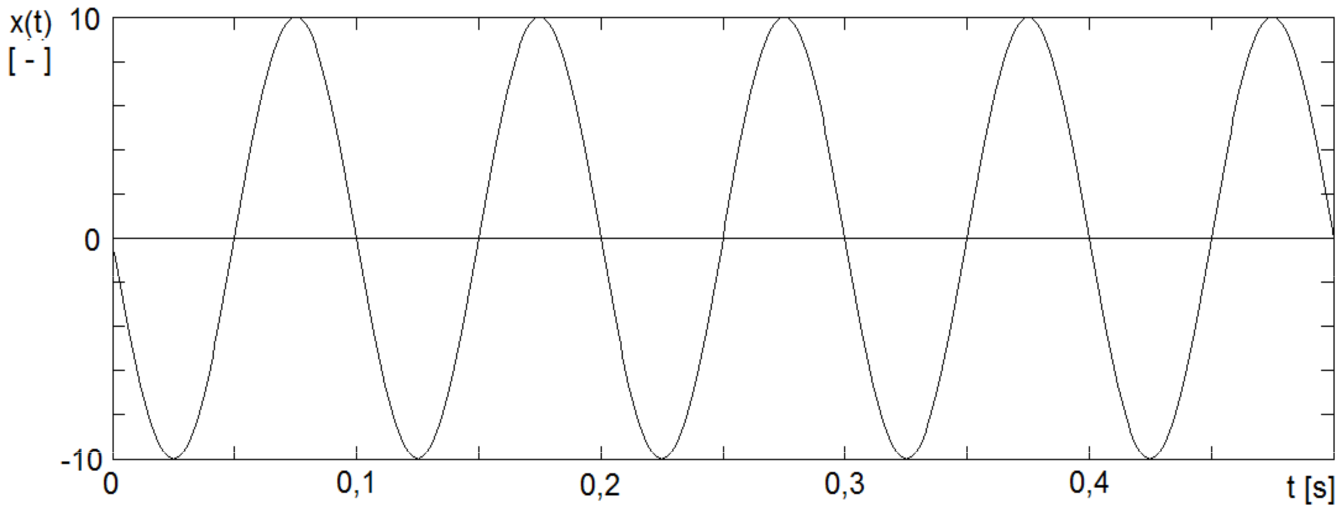


kmitočet h.f. je definován

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$

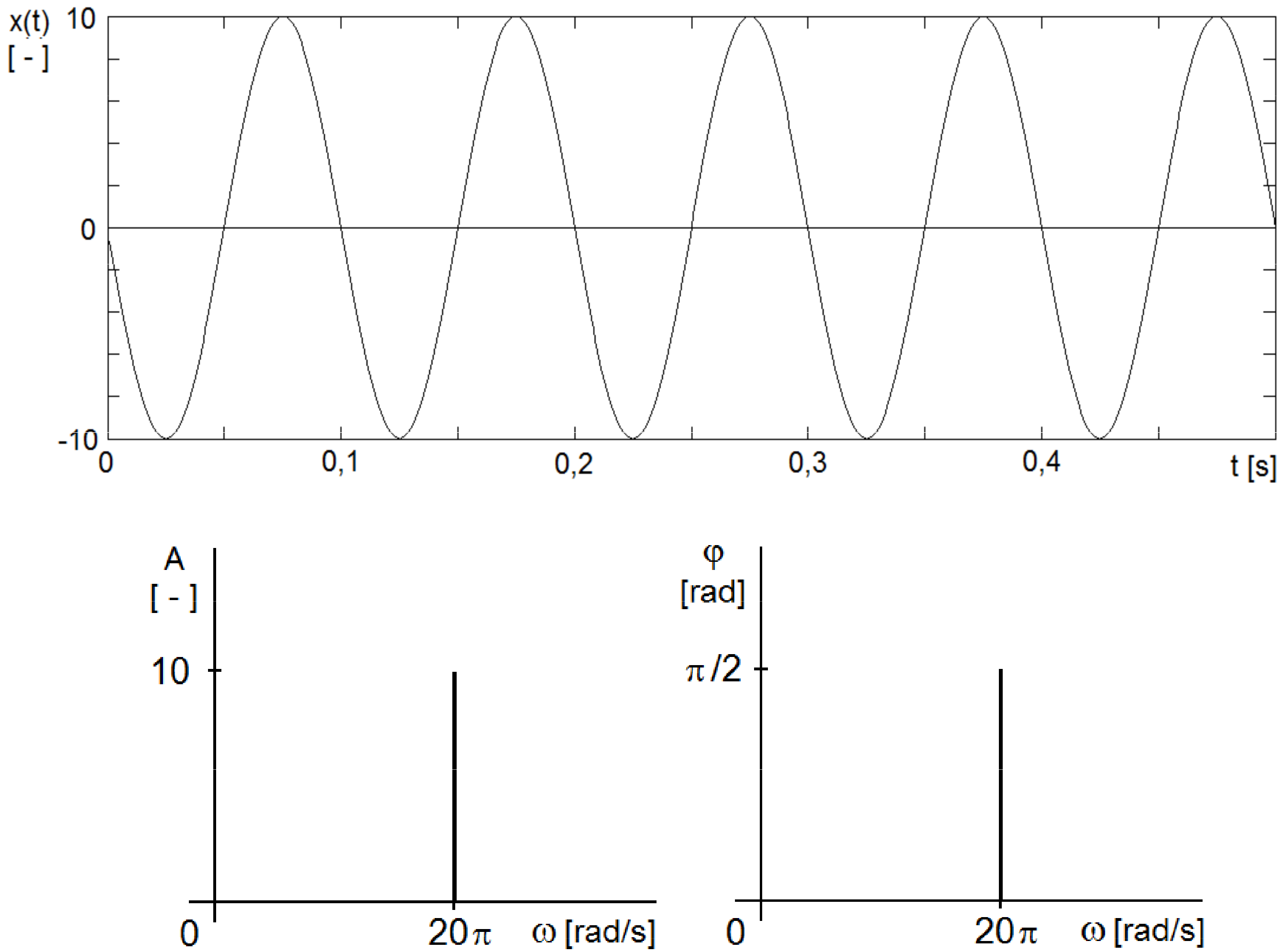
HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$



HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$



HARMONICKÁ FUNKCE

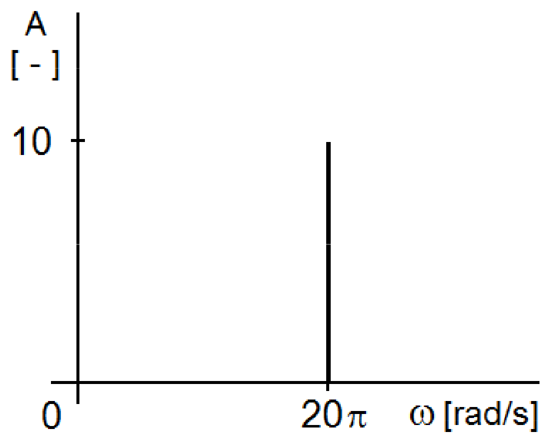
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

- ☑ tříparametrický harmonický signál lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

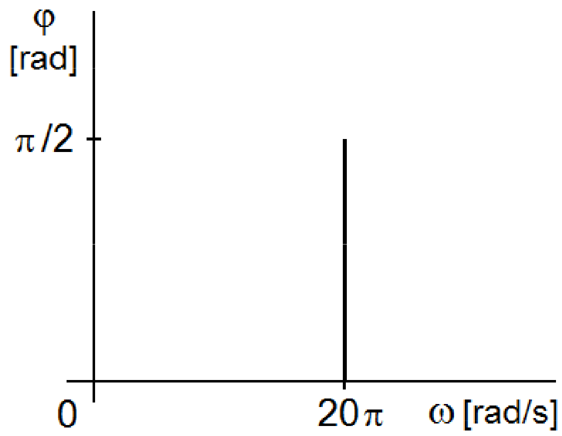
  amplituda x (úhlový) kmitočet a

  počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad a \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$



spektrum amplitud



spektrum počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

HARMONICKÝ SIGNÁL

- další definice

$$x(t) = \mathcal{Re}\{\dot{x}(t)\} = \mathcal{Re}\{A.\exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

HARMONICKÝ SIGNÁL

kupodivu lze použít i vztah

$$x(t) = \mathcal{Re}\{A.\exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \mathcal{Re}\{\dot{x}^*(t)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to

HARMONICKÝ SIGNÁL

Protože platí

$$x(t) = Re\{\dot{x}(t)\} = Re\{\dot{x}^*(t)\} \text{ a } Im\{\dot{x}(t)\} = -Im\{\dot{x}^*(t)\}$$

je i

$$x(t) = ½.\{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(j\varphi_0).\exp(j\omega t)\} +$$
$$+ ½.\{A\exp(-j\varphi_0).\exp(-j\omega t)\}$$

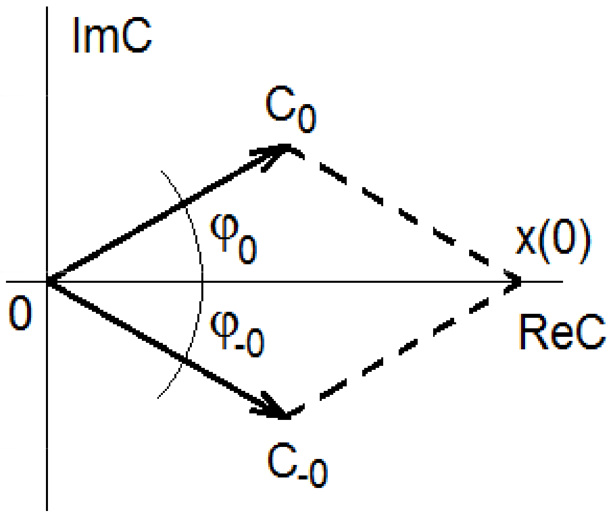
Označíme-li

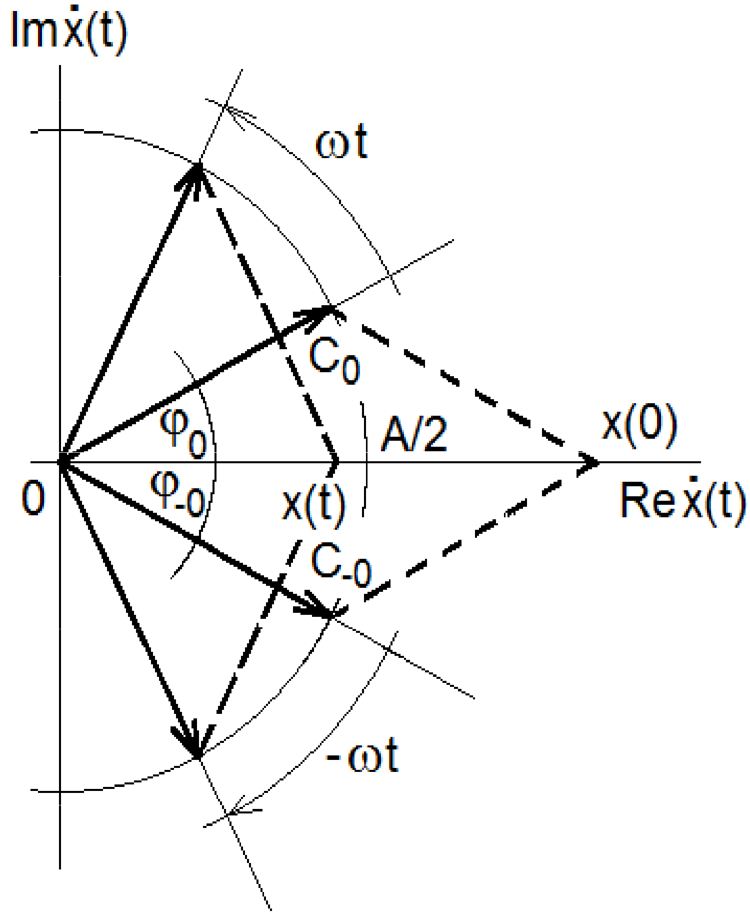
$$\dot{C}_1 = ½.A.\exp(j\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-1} = ½.A\exp(-j\varphi_0)$$

je

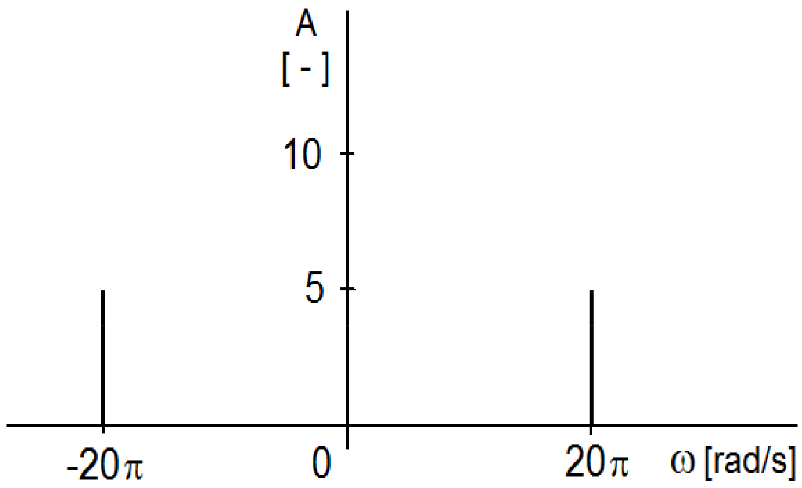
$$x(t) = \dot{C}_1.\exp(j\omega t) + \dot{C}_{-1}.\exp[j(-\omega)t]$$

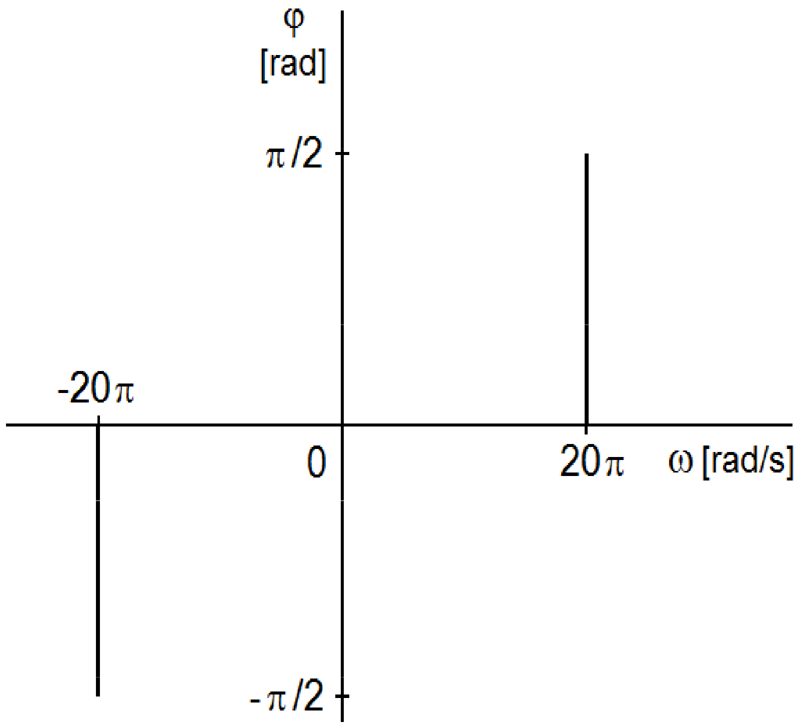
HARMONICKÝ SIGNÁL





HARMONICKÝ SIGNÁL

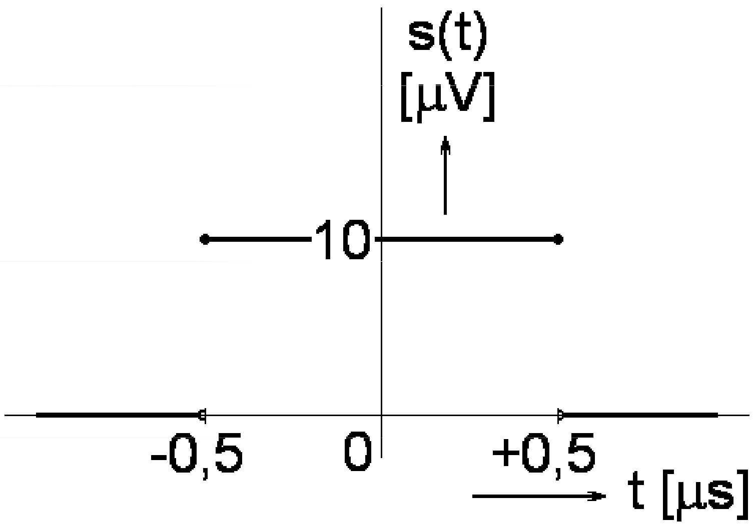




spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

NEPERIODICKÉ FUNKCE

☑ jednorázový deterministický signál



s(t) = 10.10^{-6} V pro t∈⟨-0,5 μs; 0,5 μs⟩

s(t) = 0 V pro t∈(0,5 μs; ∞⟩

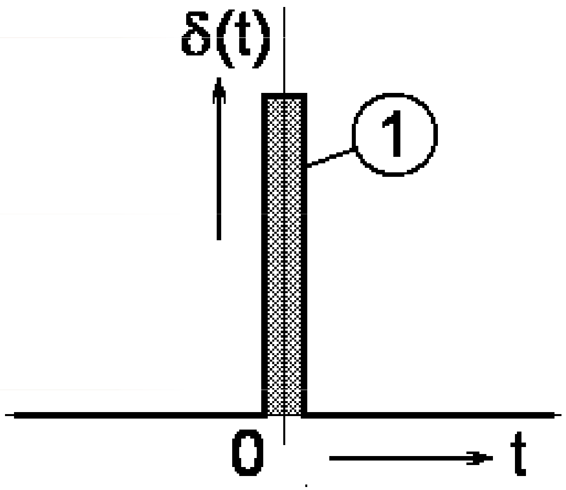
s(t) = 0 V pro t∈⟨-∞; -0,5 μs)

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$



zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

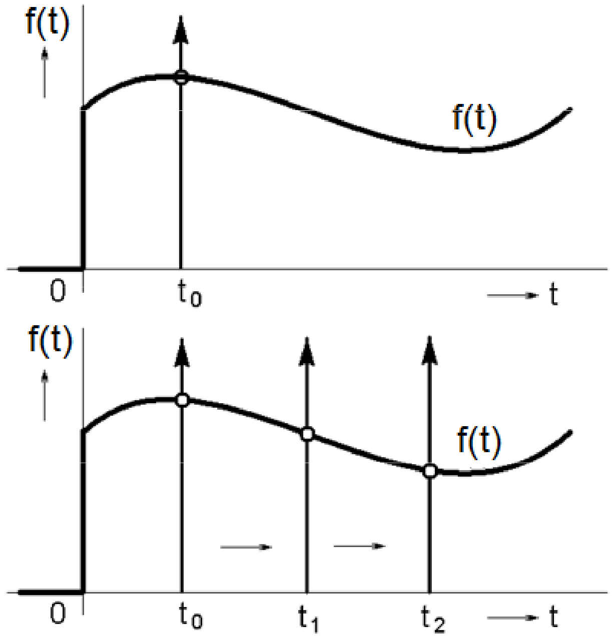
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1\,.$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

$$= f(t_0).\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

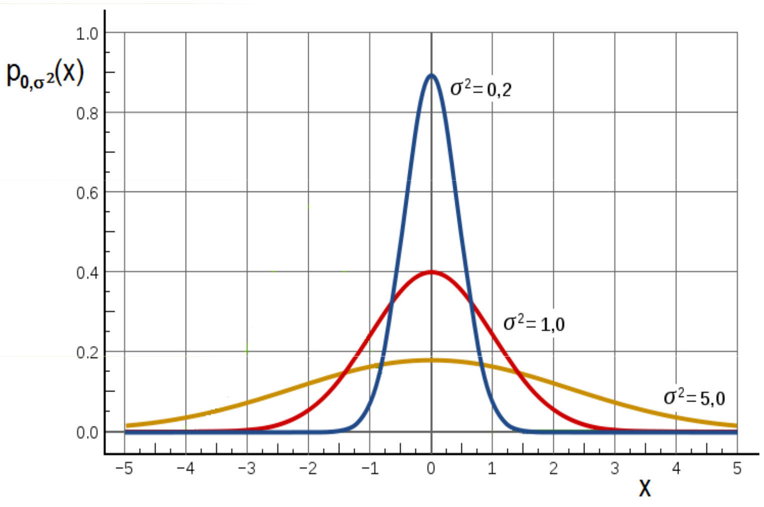
JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

zjednodušeně:



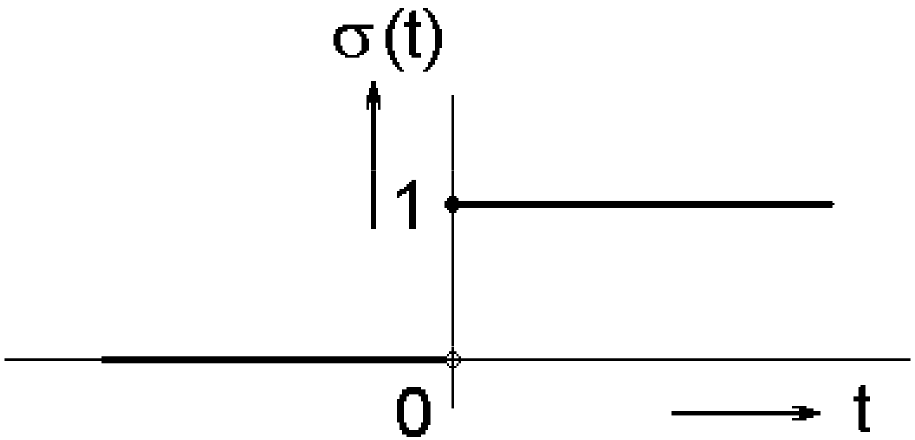
jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ pro obě uvedené jednorázové funkce platí:

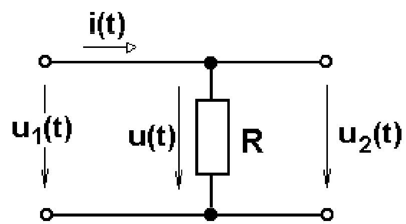
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t)$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitá výkon p(t) v čase t, vykonaný na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$



Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitého signálu x(t) vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní signál $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

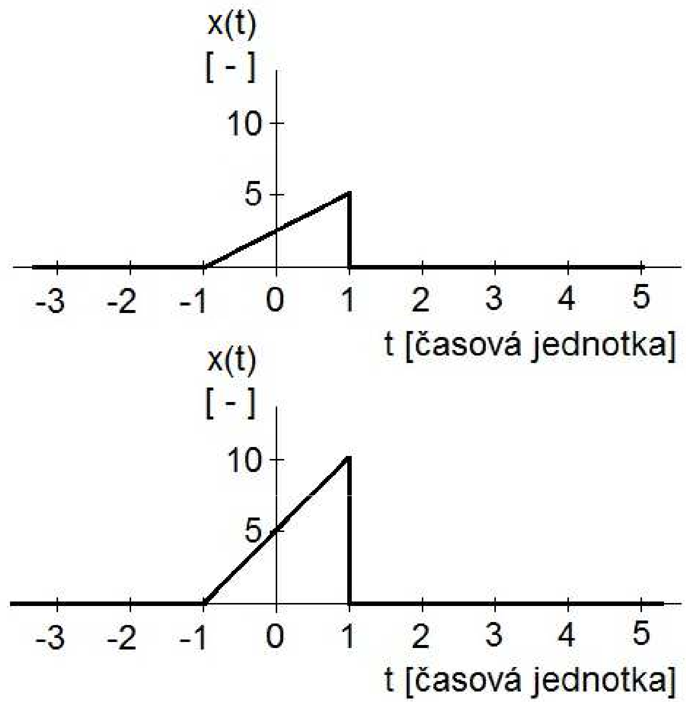
příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ násobení konstantou

$$x(t) \sim A.x(t),$$



A=2

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ **změna časového měřítka**

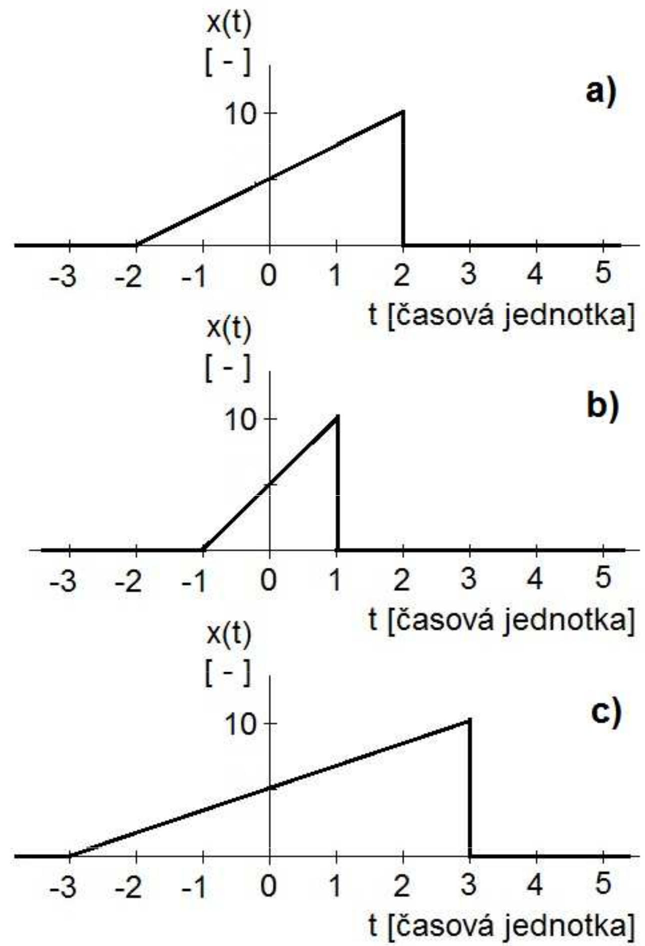
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje



a) originál; b) k=2; c) k=2/3

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

- ☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

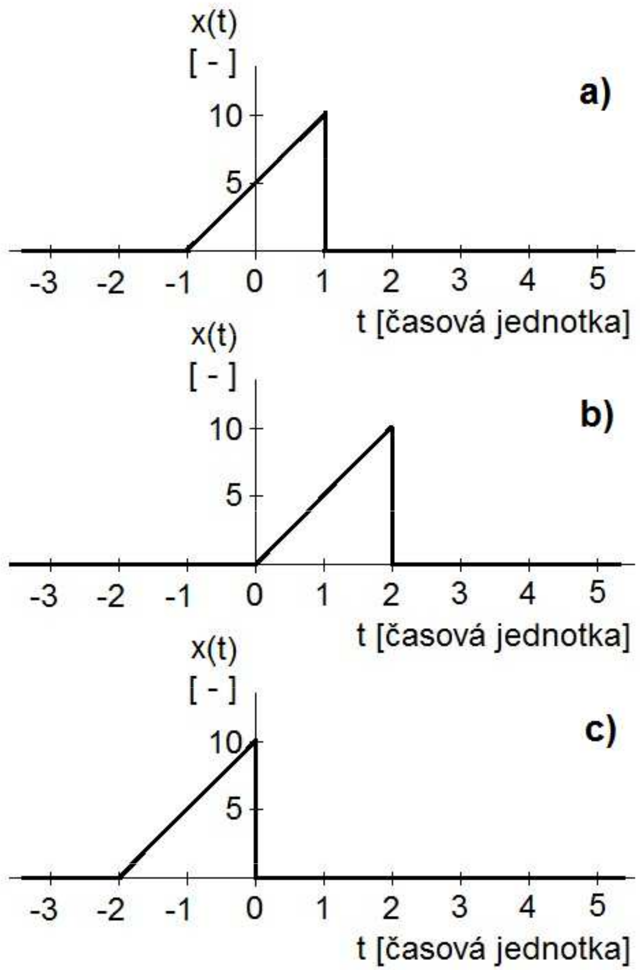
ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

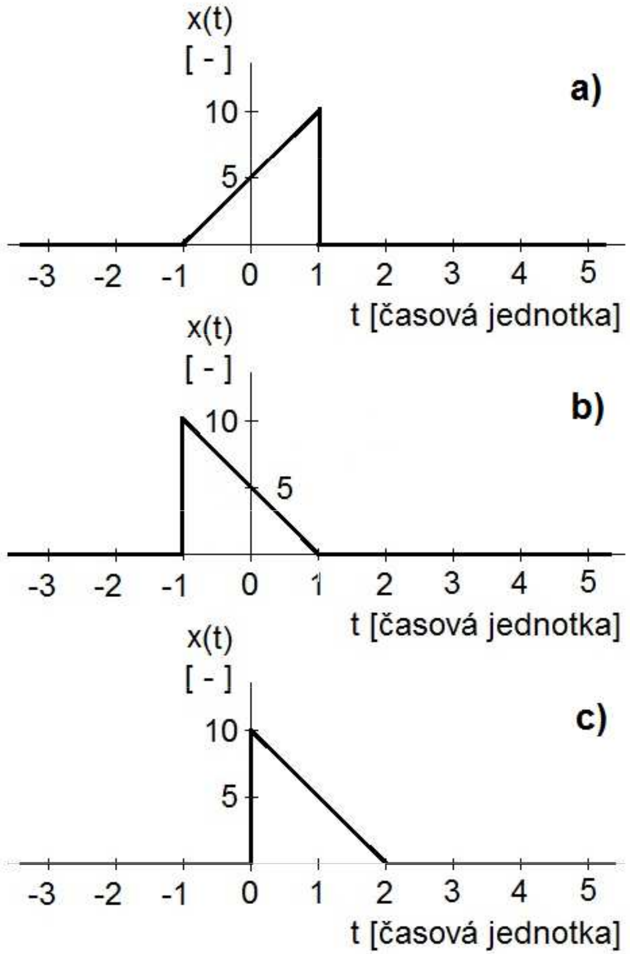


a) originál x(t); b) funkce x(t-1); c) funkce x(t+1);

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

- ☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$x(t) \sim x(-t) \,,$$



a) originál x(t); b) funkce x(-t); c) funkce x(-t-1)

SHRNUTÍ

- ☑ Jaké typy signálů známe (dle vlastností)?
- ☑ Stacionarita, ergodicita
- ☑ Definice základních signálů (jednotkový skok, impuls, harmonický signál)
- ☑ Různé formy vyjádření harmonického signálu
- ☑ Co je frekvenční spektrum?
- ☑ Základní operace se signály